CCI-22

Prof. Celso HIRATA

Sala 116 Tel. 347 5987

E mail : hirata@comp.ita.br

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Departamento de Computação Científica

Divisão de Ciência da Computação

10 de dezembro de 2007

Roteiro

1. **Resolução de Sistemas Lineares - Métodos Diretos**
   - Introdução
   - Método de Eliminação de Gauss
   - Estratégias de Pivoteamento
   - Condicionamento de uma Matriz
   - Fatoração LU
2. **Resolução de Sistemas Lineares - Métodos Iterativos**
   - Introdução
   - Método Gauss-Jacobi
   - Método Gauss-Seidel

Outline

Introdução

Um método é dito direto quando a solução exata x é obtida realizando-se um número finito de operações aritméticas em $\mathbb{R}$ (isto é, em precisão infinita).

- $Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$
- $3x = 18 \Rightarrow x = (\frac{1}{3})18 = 6$
- $3^{-1} \times 18 = (0,33333) \times 18 = 5,99994$

Cramer

Um sistema $n \times n$ envolve o cálculo de $n + 1$ determinantes de ordem n.

Se n for igual a 20 podemos mostrar que o número total de operações efetuadas será $21 \times 20! \times 19$ multiplicações e mais um número semelhante de adições. Um computador que faz 100 Mflops (milhões de operações de Ponto Flutuante por segundo) leva 3.105 anos para efetuar as multiplicações necessárias.

Outline

Método consiste em transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente com a matriz dos coeficientes triangular superior, e resolver este último sistema pois ele é de resolução imediata.

Resolução de Sistema Triangular

Tomemos a equação matricial $Ax = b$, sendo A uma matriz triangular superior com elementos da diagonal diferentes de zero. Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Da última equação, temos:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

x_{n-1} pode então ser obtido da penúltima equação:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}}$$

E assim, sucessivamente, obtêm-se x_{n-2}, x_{n-3}, ..., x_2 e, finalmente, x_1:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

Algoritmo

Dado um sistema triangular superior $n \times n$ com elementos da diagonal da matriz A não nulos, as variáveis $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$ são assim obtidas:

$x_n \leftarrow \frac{b_n}{a_{nn}}$

for $i = (n-1), \ldots, 2, 1$

$\quad s = 0$

$\quad$ for $j = (i+1), \ldots, n$

$\quad\quad s = s + a_{ij} a_j$

$\quad x_i = \frac{b_i - s}{a_{ij}}$

Transformação do Sistema Linear Original em um Sistema Linear Equivalente com Matriz Triangular Superior

Dois sistemas lineares, $Ax = b$ e $A'x = b'$ são equivalentes se qualquer solução de um é também solução do outro.

Para modificar ”convenientemente”o sistema linear dado de forma a obter um sistema equivalente, faremos uso do seguinte teorema:

TEOREMA

Seja $Ax = b$ um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma seqüência de operações, escolhidas entre:

- trocar duas equações;
- multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;

Obtemos um novo sistema $A'x = b'$ e os sistemas $Ax = b$ e $A'x = b'$ são equivalentes.

Descrevemos a seguir como o método de eliminação de Gauss usa este teorema para triangularizar a matriz A. Vamos supor que o determinante de A é diferente de zero ($detA \neq 0$).

A eliminação é efetuada por textbfcolunas e chamaremos de estágio k do processo, a fase em que se elimina a variável x_k das equações $k+1$, $k+2$, $\ldots$, n.

Usaremos $a_{ij}^{(k)}$ para denotar o coeficiente da linha i e coluna j no final do k-ésimo estágio, bem como $b_i^{(k)}$ será o i-ésimo elemento do vetor constante no final do estágio k.

Seja $A^{(0)}|b^{(0)} = A|b =$

$$\left|\begin{array}{cccc||c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array}\right|$$

onde: $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad b_i^{(0)} = b_i$ e $a_{11}^{(0)} \neq 0.$

ESTÁGIO 1:

O elemento $a_{11}^{(0)}$ é chamado pivô deste estágio e os elementos $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}}$, para $i = 2, \ldots, n$ são os múltiplos do primeiro estágio.

A eliminação da variável x_1 das equações $2, \ldots, n$ é feita da seguinte forma: a i-ésima equação é substituída por ela mesma, menos a primeira equação multiplicada por m_{i1}

Ao final deste estágio temos a matriz $A^{(1)}|b^{(1)} =$

$$\left|\begin{array}{cccc||c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right|$$

onde, $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}$ para $j = 1, \dots, n$;

$$b_1^{(1)} = b_1^{(0)};$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}.a_{1j}^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, n;$$

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1}.b_1^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n.$$

ESTÁGIO 2:

O pivô é o elemento da posição a_{22} sendo preciso que ele seja diferente de zero.

Os multiplicadores deste estágio serão os elementos $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ para $i = 3, \ldots, n$.

A variável x_2 é eliminada das equações 3, ..., n da seguinte forma: a i-ésima equação é substituída por ela mesma menos a segunda equação multiplicada por m_{i2}.

Ao final, teremos a matriz $A^{(2)}|b^{(2)}$:

$$\left|\begin{array}{cccccc||c}
a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & & b_1^{(2)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & & b_3^{(2)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\
0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & & b_n^{(2)}
\end{array}\right|$$

onde: $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)}$ para $i = 1, 2$ e $j = i, i+1, \dots, n$;

$b_i^{(2)} = b_i^{(1)}$ para $i = 1, 2$;

$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2}.a_{2j}^{(1)}$ para $i = 3, \dots, n$ e $j = 2, \dots, n$;

$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2}.b_2^{(1)}$ para $i = 3, \dots, n$.

Seguindo raciocínio análogo procede-se até o estágio $n-1$ e a matriz ao final deste estágio será $A^{(n-1)}|b^{(n-1)} =$

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} & b_{1}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \dots & a_{2n}^{(n-1)} & b_{2}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & \dots & a_{3n}^{(n-1)} & b_{3}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_{n}^{(n-1)} \end{array}\right|$$

E o sistema linear $A^{(n-1)}.x = b^{(n-1)}$ é triangular superior e equivalente ao sistema linear original.

Exemplo:

Seja o sistema linear:

$$S = \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{cases}$$

Estágio 1: Eliminar x_1 das equações 2 e 3:

$$\left|\begin{array}{ccc||c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc||c|c} \mathbf{3} & 2 & 4 & 1 & L_1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & L_2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 & L_3 \end{array}\right.$$

Pivô $a_{11}^{(0)} = 3, \quad m_{21} = \frac{1}{3}, \quad m_{31} = \frac{4}{3}.$

$$L_2 \longleftrightarrow L_2 - L_1.m_{21}$$

$$L_3 \longleftrightarrow L_3 - L_1.m_{31}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{22}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right|$$

Estágio 2: Eliminar x_2 da equação 3:

Pivô $a_{22}^{(1)} = \frac{1}{3}$ $\quad m_{32} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$

$$L_3 \longleftrightarrow L_3 - L_2.m_{32}$$

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left|\begin{array}{ccc||c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right|$$

Assim, resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= \quad 1 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 &= \quad \tfrac{5}{3} \\ -8x_3 &= \quad 0 \end{aligned}$$

$x_3 = 0 \quad x_2 = 5 \quad x_1 = -3$.

Assim, o vetor solução é $x = \begin{vmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix}$

Algoritmo

Seja o sistema linear $Ax = b$, $A : n \times n$, $x : n \times 1$, $b : n \times 1$.

Supor que $a_{kk}^{(k+1)} \neq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$.

for $k = 1, \ldots, n-1$

  for $i = k+1, \ldots, n$

    $m \leftarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

    $a_{ik} \leftarrow 0$

    for $j = k+1, \ldots, n$

      $a_{ij} = a_{ij} - m.a_{kj}$

    $b_i \leftarrow b_i - m.b_k$

$x_n \leftarrow \frac{b_n}{a_{nn}}$

for $i = n - 1, \ldots, 2, 1$

  $s = 0$

  for $j = i + 1, \ldots, n$

    $s = s + a_{ij}.x_j$

  $x_i = \frac{b_i - s}{a_{ij}}$

stop

Outline

Vimos que o algoritmo para o método de eliminação de Gauss requer o cálculo dos multiplicadores.

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad i = k+1, \ldots, n$$

em cada estágio k do processo.

Se o pivô estiver próximo de zero? Temos duas estratégias:

- Pivoteamento Parcial
- Pivoteamento Completo

Pivoteamento Parcial

Esta estratégia consiste em:

I. No início do estágio k do processo de eliminação, escolher para pivô, o elemento com o maior módulo entre os coeficientes: $a_{ik}^{(k-1)}$ $i = k, k+1, \ldots, n$.

II. Trocar as linhas k e i se for necessário.

Exemplo: $k = 2$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left|\begin{array}{cccc||c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right|$$

Início do ESTÁGIO 2:

I. Escolher pivô:

$$max|a_{j2}^{(1)}| = |a_{32}^{(1)}| = 3 \rightarrow \text{pivô} = -3$$

II. Trocar linhas (2) e (3):

Assim, $A^{(1)}|b^{(1)} = \left|\begin{array}{cccc||c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right|$

os multiplicadores $m_{32} = -\frac{1}{3} \quad m_{42} = -\frac{2}{3}$.

Pivoteamento Completo

Nesta estratégia, no início do estágio k é escolhido para pivô o elemento de maior módulo, entre todos os elementos que ainda atuam no processo de eliminação.

$$max_{\forall i,j>k}|a_{ij}^{(k-1)}| = |a_{rs}^{(k-1)}| \rightarrow \text{pivô} = a_{rs}^{(k-1)}$$

Oservamos que, no exemplo anterior, se fosse adotada esta estratégia, o pivô da estratégia 2 seria o $a_{34}^{(1)} = 7$, o que acarretaria a troca das colunas 2 e 4 e em seguida das linhas 2 e 3, donde:

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left|\begin{array}{cccc||c} 3 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 15 \end{array}\right|$$

Exemplo: Considere a resolução do sistema linear abaixo usando uma máquina com precisão de 3 dígitos.

$$S = \begin{cases} 0,0002x_1 + 2x_2 & = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 & = 6 \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} 0,2 \times 10^{-3}x_1 + 0,2 \times 10^{1}x_2 & = 0,5 \times 10^{1} \\ 0,2 \times 10^{-1}x_1 + 0,2 \times 10^{1}x_2 & = 0,6 \times 10^{1} \end{cases}$$

Então, $A^{(0)}|b^{(0)} = \left|\begin{array}{cc||c} 0,2\times 10^{-3} & 0,2\times 10^{1} & 0,5\times 10^{1} \\ 0,2\times 10^{1} & 0,2\times 10^{1} & 0,6\times 10^{1} \end{array}\right|$

Estágio 1:

Pivô = $0,2\times 10^{-3}$

$m_{21} = \frac{0,2\times 10^{1}}{0,2\times 10^{-3}} = 1\times 10^{4} = 0,1\times 10^{5}$

$a_{21}^{(1)} = 0$

$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)}.m_{21} = 0,2\times 10^{1} - (0,2\times 10^{1})(0,1\times 10^{5}) = -0,2\times 10^{5}$

$b_{2}^{(1)} = b_{2}^{(0)} - b_{1}^{(0)}.m_{21} = 0,6\times 10^{1} - (0,5\times 10^{1})(0,1\times 10^{5}) = -0,5\times 10^{5}$

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \left| \begin{array}{cc||c} 0,2 \times 10^{-3} & 0,2 \times 10^{1} & 0,5 \times 10^{1} \\ 0 & -0,2 \times 10^{5} & -0,5 \times 10^{5} \end{array} \right|$$

E a solução do sistema $A^{(1)}x = b^{(1)}$ resultante é:

$$-0,2 \times 10^{5}.x_2 = -0,5 \times 10^{5} \Rightarrow x_2 = 0,25 \times 10^{1}$$

$$0,2 \times 10^{-3}.x_1 + 0,2 \times 10^{1} \times 0,25 \times 10^{1} = 0,5 \times 10^{1} \Rightarrow x_1 = 0$$

E assim $x = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 2,5 \end{array} \right|$

É fácil verificar que essa solução não satisfaz a segunda equação, pois

$$2 \times 0 + 2 \times 2,5 = 5 \neq 6!!!$$

Usando agora a estratégia de Pivoteamento Parcial, temos:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left| \begin{array}{cc||c} 0,2 \times 10^{1} & 0,2 \times 10^{1} & 0,6 \times 10^{1} \\ 0,2 \times 10^{-3} & 0,2 \times 10^{1} & 0,5 \times 10^{1} \end{array} \right|$$

Assim o pivô é $0,2 \times 10^{1}$ e $m_{21} = \frac{0,2 \times 10^{-3}}{0,2 \times 10^{1}} = 0,1 \times 10^{-3}$

De forma análoga ao que fizemos acima obtemos o novo sistema:

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left| \begin{array}{cc||c} 0,2 \times 10^1 & 0,2 \times 10^1 & 0,6 \times 10^1 \\ 0 & 0,2 \times 10^1 & 0,5 \times 10^1 \end{array} \right|$$

cuja solução é $x_1 = 0,5$ e $x_2 = 2,5$ e o vetor x é realmente a solução do nosso sistema (verifique!).

Outline

Dado um sistema $Ax = b$ e sejam os valores x_1 e x_2 duas aproximações da solução exata x. Mas qual das aproximações é a melhor?

Vamos usar a estratégia de calcular resíduos.

$$r_1 = b - Ax_1 \quad \text{e} \quad r_2 = b - Ax_2$$

$$Exemplo: \begin{cases} 0,24x + 0,36y + 0,12z & = 0,84 \\ 0,12x + 0,16y + 0,24z & = 0,52 \\ 0,15x + 0,21y + 0,25z & = 0,64 \end{cases}$$

e sejam $x_1 = (25, -14, -1)^T$ e $x_2 = (-3, 4, 0)^T$.

Os resíduos são:

$$r_1 = b - Ax_1 = \begin{vmatrix} 0,84 \\ 0,52 \\ 0,64 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0,24.25 + 0,36.(-14) + 0,12.(-1) \\ 0,12.25 + 0,16.(-14) + 0,24.(-1) \\ 0,15.25 + 0,21.(-14) + 0,25.(-1) \end{vmatrix}$$

Então $r_1 = (0,00 \quad 0,00 \quad 0,08)$

Analogamente, encontramos $r_2 = (0,12 \quad 0,24 \quad 0,25)$

A solução exata é $x = (-3,4,1)$.

Vê-se que $r_1 < r_2$ mas x_2 é melhor que x_1!!!

Conclusão: Nem sempre a aproximação de menor resíduo é a melhor ou mais exata.

Definição: Um problema é dito ”mal condicionado”se pequenas alterações dos dados de entrada ocasionam grandes erros no resultado final.

$$Exemplo : \begin{cases} 0,992x + 0,873y & = 0,119 \\ 0,481x + 0,421y & = 0,060 \end{cases}$$

Solução exata: $x = 1$, $y = -1$.

Sejam as variações nos dados de $\pm 0,001$:

$$Exemplo : \begin{cases} 0,992x + 0,873y & = 0,120 \\ 0,481x + 0,421y & = 0,060 \end{cases}$$

Nova solução: $x = 0,815$ e $y = 0,789$.

Erro na entrada: $\frac{|0{,}119-0{,}120|}{0{,}119} = 0,8\%$ **Erro na saída:** $\frac{|0{,}815-1{,}0|}{1{,}0} = 21\%$

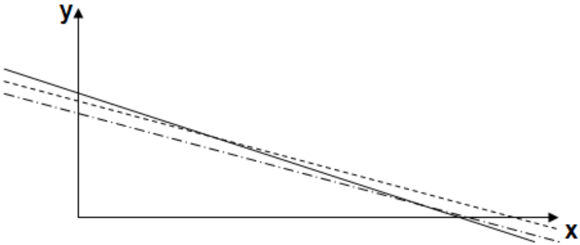
Exemplo: Sejam os dois sistemas abaixo:

$$Sistema1: \begin{cases} x + 3y & = 11 \\ 1,5x + 4,501y & = 16,503 \end{cases}$$

$$Sistema2: \begin{cases} x + 3y & = 11 \\ 1,5x + 4,501y & = 16,500 \end{cases}$$

Solução do sistema 1: $x = 2$ e $y = 3$.

Solução do sistema 2: $x = 10,28$ e $y = 0,24$.


y
x

Medida de condicionamento

Seja $Ax = b$ um sistema que sofre uma modificação transformando-se em $Ax = b'$, que implica numa nova solução x'.

Então desejamos saber qual será a modificação em x sabendo que b foi alterado para b'.

$$b - b' = Ax - Ax' = A(x - x')$$

$$(x - x') = A^{-1}(b - b')$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$\frac{|x - x'|}{|x|} \leq ||A^{-1}||.||A||.\frac{|b - b'|}{|b|}$$

onde:

$\frac{|x-x'|}{|x|} \rightarrow$ valor relativo provocado pela alteração de b para b';

$||A^{-1}||.||A|| \rightarrow$ fator de ampliação;

$\frac{|b-b'|}{|b|} \rightarrow$ valor relativo de pertubação feita no sistema $Ax = b$.

Definição do Condicionamento

Dado o sistema $Ax = b$, seu número de condicionamento é dado por:

$$Cond(A) = ||A||_{\infty}.||A^{-1}||_{\infty}$$

Quanto maior for o valor de $Cond(A)$, mais sensível será o sistema.

Revisão: Normas Vetoriais e Matriciais

Definição: Uma norma em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) é função de variável real $||.||$ satisfazendo ($\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall y \in \mathbb{R}^n$):

$$||x|| \geq 0 \quad \text{e} \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, ||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Temos como exemplos de normas no $\mathbb{R}^n$:

- Norma Euclidiana: $||x||_e = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_i|^2}$;
- Norma da Soma: $||x||_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_i|$;
- Norma do Máximo: $||x||_\infty = max|x_i|$.

Exemplo: $x = (-2, 1, 6)^t$:

$$||x||_1 = 9 \quad ||x||_e = 6,403 \quad ||x||_\infty = 6$$

Definição: Uma norma $\mathbb{R}^{m\times n}$ é uma função que satisfaz ($\forall A$, B pertencentes a $\mathbb{R}^{m\times n}$):

$$||A|| \geq 0 \quad \text{e} \quad ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, ||\alpha A|| = |\alpha|.||A||$$

$$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$$

As normas matriciais mais usadas são:

- Máximo (da soma) das colunas: $||A||_1 = max(\sum_i |a_{ij}|)$
- Máximo (da soma) das linhas: $||A||_\infty = max(\sum_j |a_{ij}|)$
- Euclidiana: $||A||_e = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$

Exemplo: $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

É fácil ver que $||A||_1 = 17$, $||A||_\infty = 10$ e $||A||_e = \sqrt{122}$.

As normas matriciais são compatíveis com as normas vetoriais no seguinte sentido:

$$||Ax||_1 \leq ||A||_1.||x||_1$$

$$||Ax||_\infty \leq ||A||_\infty.||x||_\infty$$

$$||Ax||_2 \leq ||A||_2.||x||_2$$

Exemplo:

$$S : \begin{cases} x_1 + 10^4 x_2 & = 10^4 \\ x_1 + x_2 & = 2 \end{cases}$$

Temos que $A = \begin{vmatrix} 1 & 10^4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ e também $A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -10^4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Logo, concluímos que $Cond(A) = ||A||_\infty.||A^{-1}||_\infty = 10^8$.

Método para Refinamento da Solução

- O cálculo de condicionamento é difícil;
- O método de refinamento sucessivo dá um idéia de:
  - exatidão;
  - condicionamento (bem ou mal condicionado).

Descrição do Método

Passo I: Obter uma primeira aproximação x_1 da solução exata do sistema linear via Gauss (com pivoteamento).

Passo II: Refinar a solução obtida a partir de x_n gerando uma aproximação x_{n+1} e obtendo mediante condições de convergência, ou seja

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Geração das Aproximações

Resolvendo o sistema $Ax = b$ pelo método de eliminação de Gauss com pivoteamento, obtemos x_1 como aproximação inicial. Determinaremos z_1 tal que $x = x_1 + z_1$.

Primeiro Refinamento: Determinar z_1:

$$x = x_1 + z_1 \Rightarrow z_1 = x - x_1 \Rightarrow Az_1 = Ax - Ax_1$$

$$Az_1 = b - Ax_1 = r_1 \Rightarrow Az_1 = r_1$$

z_1 pode ser calculado resolvendo o sistema acima.

Então, temos que

$$x_2 = x_1 + \bar{z_1}$$

onde $\bar{z_1}$ é o vetor arredondado de z_1.

Segundo Refinamento: Determinar z_2:

$$Az_2 = b - Ax_2 = r_2$$

$$Az_2 = r_2$$

e podemos obter z_2 e $\bar{z_2}$ e, portanto, $x_3 = x_2 + \bar{z_2}$.

Terceiro Refinamento: Idem.

Assim, teremos construído uma seqüência $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ para a qual veremos uma condição de convergência.

Teorema: Sejam os vetores X_n definidos anteriomente, seja x a solução de $Ax = b$ e valha:

- $Cond(A) < \frac{1}{16\mu(n^3+3n^2)}$
- os resíduos r_k sejam calculados em Precisão Dupla

Então a seqüência converge para solução exata.

Observação: Se a matriz A for bem condicionada, a convergência é rápida.

Exemplo: Seja $F = F(10, 5, -98, 100)$

$$S : \begin{cases} 2,4759x_1 + 1,6235x_2 + 4,6231x_3 = 0,06470 \\ 1,4725x_1 + 0,95890x_2 - 1,3253x_3 = 1,0473 \\ 2,6951x_1 + 2,8965x_2 - 1,4794x_3 = -0,67890 \end{cases}$$

então temos $X_1 = (1,8406 \quad -2,0717 \quad -0,24419)$.

Primeiro Refinamento: $F(10, 10, -98, 100)$

$AX_1 = (0,064821801 \quad 1,047355377 \quad -0,678823304)$

$r_1 = b - AX_1 = (-0,000121801 \quad -0,000055377 \quad -0,000076696)$

Então, resolve-se $Az_1 = r_1$. Usar as trocas e multiplicadores já calculados.

Logo, $z_1 = (0,0000042282 \quad 0,000025110 \quad -0,000057765)$ e

$X_2 = (1,8405 \quad -2,0717 \quad -0,24419)$.

Mal Condicionado: resíduos pequenos $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ e grandes correções $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Bem Condicionado: o número de iterações é menor ou igual a 2.

Outline

Sejam $Ax = b$ e L e U tais que $A = LU$, então $LUx = b$ ou $L(Ux) = b$.

Se $Ux = y$, então $Ly = b$. Se os sistemas $Ly = b$ e $Ux = y$ forem fáceis de resolver, resolvemos o sistema original $Ax = b$. Vimos que os sistemas com matriz triangular são fáceis de resolver. A idéia é obter as matrizes triangulares L e U tais que $A = LU$.

Cálculo dos fatores L e U:

Seja o sistema:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \end{cases}$$

Então, $A^{(0)} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{vmatrix} = A$

Os multiplicadores do estágio 1 do Gauss são $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ e $m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$, (supondo que $a_{11}^{(0)} \neq 0$).

Para eliminar x_1 da linha j, $j = 2, 3$ multiplicamos a linha 1 por m_{j1} e subtraímos o resultado da linha j.

A partir dos coeficientes $a_{ij}^{(0)}$, no final do primeiro estágio obteos os coeficientes $a_{ij}^{(1)}$:

$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)} \quad j = 1, 2, 3$

$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}.a_{1j}^{(0)} \quad i = 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$

Estas operações correspondem a se pré-multiplicar a matriz $A^{(0)}$ pela matriz $M^{(0)}$, onde:

$$M^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

isto é, $M^{(0)}.A^{(0)} = A^{(1)}$

Fazemos $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, e tiramos, similarmente que $A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)}$, onde:

$$M^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{vmatrix}$$

$M^{(1)}A^{(1)} = A^{(2)}$ é a matriz A no final do segundo estágio de Gauss.

Temos então que:

$$A = A^{(0)}$$
$$A^{(1)} = M^{(0)}A^{(0)} = M^{(0)}A$$
$$A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)} = M^{(1)}M^{(0)}A$$

Então,

$$A^{(2)} = M^{(1)}M^{(0)}A$$
$$A = (M^{(1)}M^{(0)})^{-1}A^{(2)} = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1}A^{(2)}$$

$$(M^{(0)})^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{vmatrix} ,(M^{(1)})^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{vmatrix} \text{ e}$$

$$(M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{vmatrix}$$

Então:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{vmatrix} = L.U$$

Resolução de $AX = b \Rightarrow LUx = b$:

Se $Ux = y$ então $Ly = b$.

Se resolvermos o sistema $Ly = b$, obtemos y.

Com y, resolvemos o sistema $Ux = y$, obtendo x.

Calcular LU:

1: Resolver $Ly = b$:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ m_{21}y_1 + y_2 &= b_2 \\ m_{31}y_1 + m_{32}y_2 + y_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Com substituição obtemos (y_1, y_2, y_3).

2: Resolver $Ux = y$:

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + a_{13}^{(2)}x_3 &= y_1 \\
0 + a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 &= y_2 \\
0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 &= y_3
\end{aligned}
$$

Com retrosubstituição obtemos (x_1, x_2, x_3).

Exemplo:

$$S : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \end{cases}$$

Temos então $A = \left| \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

Passo 1: pivô $a_{11}^{(0)} = 3$, $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{3}$ e $m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{4}{3}$.

Fazemos as alterações: $L_1 = L_1 \quad L_2 = L_2 - m_{21}L_1 \quad L_3 = L_3 - m_{31}L_1$, e:

$$A^{(1)} = \left|\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-22}{3} \end{array}\right|$$

Passo 2: pivô $a_{22}^{(1)} = \frac{1}{3}$, $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 1$.

Fazemos as alterações: $L_1 = L_1 \quad L_2 = L_2 \quad L_3 = L_3 - m_{31}L_1$, e:

$$A^{(2)} = \left|\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & 1 & -8 \end{array}\right|$$

Os fatores L e U são:

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } U = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

Resolvendo $L(Ux) = Ly = b$:

$$\begin{aligned} y_1 = 1 &\Rightarrow y_1 = 1 \\ \frac{1}{3}y_1 + y_2 = 2 &\Rightarrow y_2 = \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3}y_1 + y_2 + y_3 = 3 &\Rightarrow y_3 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo $Ux = y$:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -3$$
$$\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \Rightarrow x_2 = 5$$
$$-8x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

Pivoteamento Parcial à Fatoração LU

A permutação das linhas na matriz $A^{(k)}$ pode ser feita utilizando a Matriz de Permutação.

Uma matriz quadrada de ordem n é uma matriz de permutação se pode ser obtida da matriz identidade de ordem n permutando suas linhas (ou colunas).

Pré-multiplicando uma matriz A por uma matriz de permutação P obtém-se a matriz A com as linhas permutadas e esta permutação de linhas é a mesma permutação de linha efetuada na matriz identidade para obter P.

Exemplo: Podemos tomar $P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ e $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

Fazendo $P.A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Seja $Ax = b$. Os fatores L e U obtidos pelo processo da Eliminação de Gauss com Pivotamento Parcial.

L e U são fatores de A', onde A' é a matriz com linhas permutadas, isto é: $A' = P.A$.

Se permutarmos A temos de permutar b também. Seja então $b' = P.b$

Chegamos ao sistema $A'x = b'$, equivalente ao original, e, se $A' = L.U$, teremos:

$$A'x = b' \Rightarrow P.A.x = P.b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L.U.x = P.b$$

Resolvemos então os sistemas triangulares: $Ly = Pb$, $Ux = y$. E assim, obtemos a solução do sistema linear original.

Exemplo:

$$S : \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 & = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = 3 \\ 4x_1 - 3x_3 & = -2 \end{cases}$$

Temos que $A^{(0)} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ e $P^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Estágio 1: pivô $a_{31} = 4$, e deve-se permutar as linhas 1 e 3.

$$A'^{(0)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } P^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Logo, $A^{(1)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \frac{1}{4} & 2 & \frac{11}{4} \\ \frac{3}{4} & -4 & \frac{13}{4} \end{vmatrix}$

Estágio 2: pivô $a_{32}^{(1)} = 4$, e permutaremos as linhas 2 e 3.

$$A'^{(1)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \frac{3}{4} & -4 & \frac{13}{4} \\ \frac{1}{4} & 2 & \frac{11}{4} \end{vmatrix} \text{ e } P^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Chegamos então a $A^{(2)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \frac{3}{4} & -4 & \frac{13}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{35}{8} \end{vmatrix}$

Os fatores L e U são:

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & 1 \end{vmatrix} \text{ e } U = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & \frac{35}{8} \end{vmatrix}$$

Logo: $A' = P^{(2)}.A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

Resolução:

1: $Ly = Pb$

$$Pb = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -2 \\ \frac{3}{4}y_1 + y_2 &= 9 \\ \frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= 3 \end{aligned}$$

Logo, $y = (-2, \frac{21}{2}, \frac{35}{4})$.

2: $Ux = y$

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_3 &= \quad -2 \\ -4x_2 + \frac{13}{4}x_3 &= \quad \tfrac{21}{2} \\ \frac{35}{8}x_3 &= \quad \tfrac{35}{4} \end{aligned}$$

E, portanto, $x = (1, -1, 2)$, que é solução do sistema original.

Outline

Introdução

Um método é dito iterativo quando a solução x é obtida como limite de uma seqüência de aproximações sucessivas $x^1, x^2, x^3, \ldots$

Converter o sistema $Ax = b$ para $x = Cx + g = \varphi(x)$, onde:

- C: matriz $n \times n$
- g: vetor $n \times 1$
- $\varphi(x)$: função de iterada dada na forma matricial

Nos métodos iterativos partimos de um $x^{(0)}$ e calculamos os outros usando a função de iteração.

- $x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)})$ (primeira aproximação)
- $x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)})$ (segunda aproximação)
- $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g = \varphi(x^{(k-1)})$ (k-ésima aproximação)

Testes de Parada:

- Máximo do Módulo Erro Absoluto
- Máximo do Erro Relativo
- Número de Iterações

Outline

Transformar o sistema $Ax = b$ para $x = Cx + g$.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Com isso, temos que:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n)$$

Se $x = Cx + g$:

$$C = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$g = \begin{vmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

Gauss-Jacobi

A partir de $x^{(0)}$ obter $x^{(1)}$, depois $x^{(2)}$ $\ldots x^{(k)}$, onde $x^{(j+1)} = Cx^{(j)} + g$:

$$x_i^{(j+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1^{(j)} - a_{i2}x_2^{(j)} - \ldots - a_{in}x_n^{(j)})$$

De um modo geral, a aproximação $x^{(j+1)}$ é calculada pela fórmula

$x^{(j+1)} = C + g$, ou seja, $x^{(j+1)} = \varphi(x^{(j)})$, $k = 0, 1, \ldots$

Deseja-se que a seqüência $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $\ldots$, $x^{(k)}$, $\ldots$, seja tal que:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha$$

então, $\alpha = C\alpha + g$, ou seja, α é a solução do sistema linear $Ax = b$.

Critérios de Parada

a. $x^{(k-1)} \approx x^{(k)}$

Medimos a distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ por:

$$M^{(k)} = max|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \quad 1 \leq i \leq n$$

Assim, dada uma precisão ε, o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como uma solução aproximada da solução exata, se $M^{(k)} < \varepsilon$

b. Critério de erro relativo:

$$M_R^{(k)} = \frac{M^{(k)}}{max|x_i^{(k)}|}$$

c. Número de iterações:

$$\textit{Exemplo}: \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = & 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = & -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = & 6 \end{cases}$$

Então, $x^{(0)} = (0,7 \quad -1,6 \quad 0,6)$ e $\varepsilon = 0,05$ para o critério de erro relativo.

O processo iterativo:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = 0x_1^{(k)} - \frac{2}{10}x_2^{(k)} - \frac{1}{10}x_3^{(k)} + \frac{7}{10}$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} - 0x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{8}{5}$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) = -\frac{2}{10}x_1^{(k)} - \frac{3}{10}x_2^{(k)} - 0x_3^{(k)} + \frac{6}{10}$$

Na forma matricial: $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ temos:

$$C = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} & 0 \end{vmatrix} \text{ e } g = \begin{vmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{8}{5} \\ \frac{6}{10} \end{vmatrix}$$

Assim ($k = 0$):

$$x_1^{(1)} = -0,2x_2^{(0)} - 0,1x_3^{(0)} + 0,7 = 0,96$$
$$x_2^{(1)} = -0,2x_1^{(0)} - 0,2x_3^{(0)} - 1,6 = -1,86$$
$$x_3^{(1)} = -0,2x_1^{(0)} - 0,3x_2^{(0)} + 0,6 = 0,94$$

Calculando $M_R^{(1)}$:

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0,26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0,26$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0,34$$

Então $M_R^{(1)} = \frac{0,34}{max|x_i^{(1)}|} = 0,1828 > \varepsilon$

Para $k = 1$:

$x^{(2)} = (0,978 \quad -1,98 \quad 0,966) \Rightarrow M_R^{(2)} = \frac{0,12}{1,98} = 0,0606 > \varepsilon$

Para $k = 2$:

$x^{(3)} = (0,9994 \quad -1,9888 \quad 0,9984) \Rightarrow M_R^{(3)} = \frac{0,0324}{1,9888} < \varepsilon$

Logo,

$$x = x^{(3)} = (0,9994 \quad -1,9888 \quad 0,9984)$$

Um critério de convergência é o critério das linhas. Este critério é suficiente e é o resultado de um teorema dado a seguir cuja demonstração em (Demidovich e Maron, Computacional Mathematics, 1973).

Teorema: Seja o sistema linear $Ax = b$ e seja

$$\alpha_k = \frac{\sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

Se $\alpha = max(\alpha_k) < 1$, então o método de Jacobi gera uma seqüência $(x^{(k)})$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial, $x^{(0)}$.

Exemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0,3 < 1$$
$$\alpha_2 = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 < 1$$
$$\alpha_3 = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = 0,5 < 1$$

Então o máximo dos $\alpha_k = 0,5 < 1$, donde, pelo critério das linhas, temos garantia de convergência para o método de Gauss-Jacobi.

Exemplo: Para o sistema linear:

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = & 3 \\ x_1 + 3x_2 = & -3 \end{cases}$$

O método Gauss-Jacobi gera uma seqüência convergente para a solução exata $x* = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

No entanto o critério das linhas não é satisfeito visto que $\alpha_1 = 1$. A condição do teorema de convergência é SUFICIENTE, mas não NECESSÁRIA!!!

Exemplo:

$$S = \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = & -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = & 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = & -6 \end{cases}$$

Não satisfaz o critério das linhas, pois:

$$\alpha_1 = \frac{3+1}{1} = 4 > 1$$

Se permutarmos a primeira e segunda linhas, temos:

$$S = \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = & 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = & -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = & -6 \end{cases}$$

Repare que o sistema acima satisfaz o critério das linhas. Ou seja, se o critério das linhas não for satisfeito, tentar permutação!!

Outline

Dado o sistema $Ax = b$, é o processo iterativo para obter a seqüência: $x^{(0)}$, $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(k)}$

Temos que, para $1 \leq i \leq n$:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - a_{i2}x_2^{(k)} - \ldots - a_{in}x_n^{(k)})$$

ou seja, para calcular $x_i^{(k+1)}$ usamos os valores dados de $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots,$ $x_{i-1}^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}$

$$\textit{Exemplo}: \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Dado que $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ e $\varepsilon = 0, 05$.

O processo iterativo:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 1 - 0, 2x_2^{(k)} - 0, 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 1, 5 - 0, 75x_1^{(k+1)} - 0, 25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= 0 - 0, 5x_1^{(k+1)} - 0, 5x_2^{(k+1)} \end{aligned}$$

Como $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ e $k = 0$:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1 - 0 - 0 = & 1 \\ x_2^{(1)} &= 1,5 - 0,75 \times 1 - 0 = & 0,75 \\ x_3^{(1)} &= 0 - 0,5 \times 1 - 0,5 \times 0,75 = & -0,875 \end{aligned}$$

então, $x^{(1)} = (1 \quad 0,75 \quad -0,875)$.

Com estes valores, tiramos que $M_R^{(1)} = 1 > \varepsilon$.

Fazendo agora $k = 1$:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= 1 - 0,2 \times 0,75 + 0,2 \times 0,875 = & 1,025 \\
x_2^{(2)} &= 1,5 - 0,75 \times 1,025 - 0,25 \times 0,875 = & 0,95 \\
x_3^{(2)} &= 0 - 0,5 \times 1,025 - 0,5 \times 0,95 = & -0,9875
\end{aligned}
$$

então $x^{(2)} = (1,025 \quad 0,95 \quad -0,9875)$.

Com estes valores, tiramos que $M_R^{(2)} = 0,2025 > \varepsilon$.

Partindo agora para $k = 2$:

Resolvendo, chega-se a $x^{(3)} = (1,0075 \quad 0,9912 \quad -0,9993)$.

Desta vez, temos que $M_R^{(3)} = 0,0402 < \varepsilon$.

Logo, a solução x do sistema linear dado, com erro menor que ε, pelo método de Gauss-Seidel é $x = x^{(3)} = (1,0075 \quad 0,9912 \quad -0,9993)$.

Interpretação Geométrica no Caso Bidimensional (2×2)

Tomemos o sistema:

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$$

Preparação:

$$S_1 = \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 \\ x_2 = \frac{1}{3}(3 + x_1) \end{cases}$$

Agora usando o método iterativo:

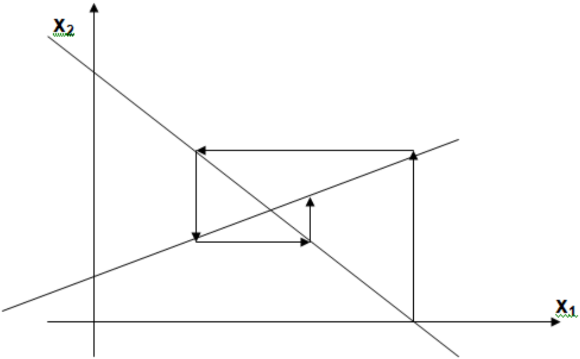
$$S_2 = \begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(3 + x_1^{(k+1)}) \end{cases}$$

Isto vai gerar os pontos: $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$, $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Na próxima página verificamos:

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0,0) \Rightarrow (x_1^{(1)}, x_2^{(0)}) = (3,0) \Rightarrow (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = (3,2)$$
$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = (3,2) \Rightarrow (x_1^{(2)}, x_2^{(1)}) = (1,2) \Rightarrow (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = (1, \frac{4}{3})$$
$$(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = (1, \frac{4}{3}) \Rightarrow (x_1^{(3)}, x_2^{(2)}) = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3}) \Rightarrow (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = (\frac{5}{3}, \frac{14}{9})$$

Observamos que os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$ satisfazem a primeira equação enquanto que os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$ satisfazem a segunda equação.



É fácil verificar que, pelo gráfico acima, a seqüência $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$, está convergindo para a solução exata do sistema linear que é $x^* = (1,5 \quad 1,5)$

$$\textit{Exemplo}: \begin{cases} x_1 - 3x_2 = & -3 \\ x_1 + x_2 = & 3 \end{cases}$$

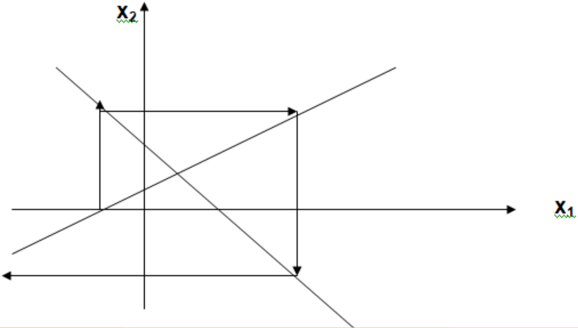
Então podemos fazer:

$$S_1 = \begin{cases} x_1^{(k+1)} = & -3 + 3x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = & 3 - x_1^{(k+1)} \end{cases}$$

Fazendo as iterações, encontramos:

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0, 0) \Rightarrow (x_1^{(1)}, x_2^{(0)}) = (-3, 0) \Rightarrow (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = (-3, 6) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1^{(2)}, x_2^{(1)}) = (15, 6) \Rightarrow (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = (15, -12)$$

Neste caso, a solução diverge quando o número de iterações aumenta!!



Estudo da Convergência do Método Gauss-Seidel: Critério de Sassenfeld

Tomemos,

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_i = \frac{|a_{i1}|\beta_1 + |a_{i2}|\beta_2 + \ldots + |a_{ii-1}|\beta_{i-1} + |a_{ii+1}| + \ldots + |a_{in}|}{|a_{ii}|}$$

Seja $\beta = \max \beta_i$. Se $\beta < 1$, então o método de Gauss-Seidel gera uma seqüência convergente qualquer que seja $x^{(0)}$.

Além disto, quanto menor for β mais rápida será a convergência.

$$
\textit{Exemplo}:\left\{\begin{array}{rr}
x_1+0,5x_2-0,1x_3+0,1x_4= & 0,2\\
0,2x_1+x_2-0,2x_3+0,1x_4= & -2,6\\
-0,1x_1-0,2x_2+x_3+0,2x_4= & 1,0\\
0,1x_1+0,3x_2-0,2x_3+x_4= & -2,5
\end{array}\right.
$$

Deste sistema, tiramos que $\beta_1 = 0,7$, $\beta_2 = 0,44$, $\beta_3 = 0,358$ e $\beta_4 = 0,2736$.

Como $\beta = 0,7 < 1$ temos a garantia de que o método Gauss-Seidel vai convergir.

$$\textit{Exemplo}: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = & 9 \\ 0x_1 - x_2 + x_3 = & 1 \\ x_1 + 0x_2 + 3x_3 = & 3 \end{cases}$$

Calculando, $\beta_1 = \frac{1+3}{2} = 2 > 1$.

Se permutarmos a primeira com a terceira linha, temos:

$$S_1 = \begin{cases} 0x_1 - x_2 + x_3 = & 1 \\ x_1 + 0x_2 + 3x_3 = & 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = & 9 \end{cases}$$

Calculamos agora, $\beta_1 = \frac{0+3}{1} = 3 > 1$.

Se permutarmos a primeira com a terceira coluna, temos:

$$S_2 = \begin{cases} 3x_3 + 0x_2 + x_1 = 3 \\ x_3 - x_2 + 0x_1 = 1 \\ 3x_3 + x_2 + 2x_1 = 9 \end{cases}$$

Assim, teremos, $\beta_1 = \frac{1}{3}$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$ e $\beta_3 = \frac{2}{3}$ e, portanto, a seqüência converge!

A seguir, vamos mostrar um exemplo de que o critério de Sassenfeld é apenas suficiente.

$$\textit{Exemplo}: \begin{cases} x_1 + x_2 = & 3 \\ x_1 - 3x_2 = & -3 \end{cases}$$

Já sabemos que a seqüência Gauss-Seidel converge para este sistema.

Contudo, $\beta_1 = 1$, ou seja, o critério de Sassenfeld não é satisfeito.

Critério das Linhas

Se $\alpha = \max \alpha_k < 1$, onde

$$\alpha_k = \frac{\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

então o método de Gauss-Seidel converge!

Verifique que se o critério das linhas for satisfeito, automaticamente o critério de Sassenfeld é satisfeito, pois, se $\alpha_i < 1$, então $\beta_i < 1$, para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Contudo, o critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o critério das linhas não o seja!

$$\textit{Exemplo}: \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Desta forma, temos que $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{3}$.

Entretanto, $\alpha_2 = 1$, ou seja, o critério das linhas não é satisfeito.

Calculando, no entanto, β_2 e β_3, verificamos que o critério de Sassenfeld é satisfeito.

Comparação dos Métodos Diretos e Iterativos

- **Convergência:**
  - **Diretos:** Os processos são finitos. Teoricamente obtém-se a solução de qualquer sistema não-singular.
  - **Iterativos:** A convergência é assegurada apenas sob determinadas condições.
- **Esparsidade da Matriz A:**
  - **Diretos:** A esparsidade pode ser destruída.
  - **Iterativos:** Mantém a esparsidade (aconselhável para solução de sistemas esparsos).

- **Erro de Arredondamento:**
  - **Diretos:** Apresentam sérios problemas com erros de arredondamento. É necessário pivoteamento.
  - **Iterativos:** Menos erros de arredondamento, visto que a convergência uma vez assegurada, independe de solução inicial. Somente o erro cometido na última iteração afera a solução.