CCI-22

Prof. Celso HIRATA

Sala 116 Tel. 347 5987

E mail : hirata@comp.ita.br

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Departamento de Computação Científica

Divisão de Ciência da Computação

29 de novembro de 2007

Roteiro

Roteiro

1. **Interpolação**
   - Introdução
   - Interpolação pelos polinômios de Lagrange
   - Interpolação usando diferenças divididas
   - Forma de Newton
   - Estudo do Erro na Interpolação
   - Fenômeno de Runge

Introdução

Temp	20	25	30	35	40	45	50
Calor Específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

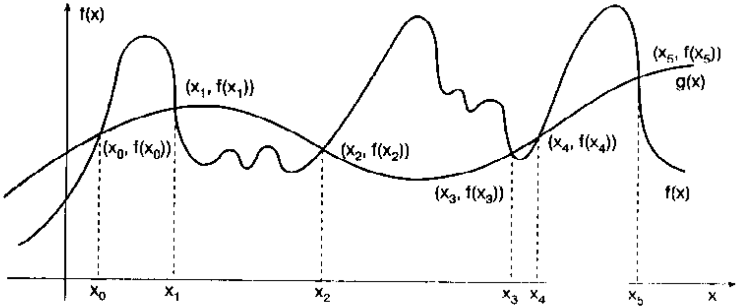
- Qual é o calor específico da água a 32.5^o C
- Qual é a temperatura para o calor específico de 0.99837

- Fazemos interpolação de $f(x)$ desconhecida por uma aproximação $g(x)$:
  - Quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado.
  - Quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como integração e diferenciação são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas.

- Problema geral de Interpolação
- Consideremos $(n+1)$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ chamados pontos (nós) de interpolação,e os valores de $f(x)$ nesses pontos $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. A forma de interpolação de $f(x)$ que veremos a seguir consiste em se obter uma determinada **polinomial** $g(x)$,tal que:

$$
\begin{aligned}
g(x_0) &= f(x_0) \\
g(x_1) &= f(x_1) \\
&\ldots \\
g(x_n) &= f(x_n)
\end{aligned}
$$

- Graficamente



- Dados os pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots (x_n, f(x_n))$,portanto $(n+1)$ pontos,queremos aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau $\leq n$,$p_n(x)$ tal que:

$$f(x_k) = p_n(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

- Existe um único polinômio $p_n(x)$ de grau $\leq n$,tal que : $p_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$,desde que $x_k \neq xj, j \neq k$

- Formas de se obter $p_n(x)$:
  - Resolução do sistema linear
  - Formas de Lagrange
  - Formas de Newton: Newton-Gregory

- Interpolação Linear
- Usamos dois pontos consecutivos i e $i+1$ para determinar os coeficientes de $p_1(x) = a_0 + a_1 x$

$$a_0 + a_1 x_i = y_i = f(x_i)$$
$$a_0 + a_1 x_{i+1} = y_{i+1} = f(x_{i+1})$$

- Interpolação Quadrática

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

- Usamos 3 pontos e resolvemos o seguinte :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-1}^2 &= y_{i-1} \\ a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 &= y_i \\ a_0 + a_1 x_{i+1} + a_2 x_{i+1}^2 &= y_{i+1} \end{aligned}$$

- Exemplo:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\begin{aligned}
p_2(x_0) = f(x_0) &\Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\
p_2(x_1) = f(x_1) &\Leftrightarrow a_0 = 1 \\
p_2(x_2) = f(x_2) &\Leftrightarrow a_0 - 2a_1 + 4a_2 = -1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2a_0 - 2a_1 + 2a_2 &= 8 \\
a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= -1
\end{aligned}
$$

$$3a_0 + 6a_2 = 7$$

$$
\begin{aligned}
a_2 = \frac{4}{6} &= \frac{2}{3} \\
a_1 &= -\frac{7}{3} \\
a_0 &= 1
\end{aligned}
$$

Assim $p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$ é o polinômio que interpola $f(x)$ em $x_0 = -1$,$x_1 = 0$,$x_2 = 2$.

Roteiro

Interpolação pelos polinômios de Lagrange

- (sem resolver o sistema linear)

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

onde:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$= \frac{(x - x_0)}{(x_k - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_k - x_1)} \cdots \frac{(x - x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})} \frac{(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k+1})} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_k - x_n)}$$

São polinômios de Lagrange.

- Ex: Seja $n = 3$ e dados x_0,x_1,x_2 e x_3.

Assim:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}\frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)}\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}\frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_3-x_0)}\frac{(x-x_1)}{(x_3-x_1)}\frac{(x-x_2)}{(x_3-x_2)}$$

- Teorema: Propriedades do polinômio de Lagrange:
  - $L_k(x) \in p_n$ i.e. $L_k(x)$ é um polinômio de grau n.
  - $L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = i \\ 0, & \text{se } k \neq i \end{cases}$

- Teorema: O polinômio de grau n ou menor que interpola os pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ é dado por:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

- Exemplo:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

- Usar a forma de Lagrange para obter $p_2(x)$

$$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

- onde :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}\frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}\frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)}\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)}{(-1-0)}\frac{(x-2)}{(-1-2)} = \frac{x^2-2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)}{(0+1)}\frac{(x+2)}{(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)}{(2+1)}\frac{(x-0)}{(2-0)} = \frac{x^2+x}{6}$$

$$p_2(x) = 4\frac{x^2-2x}{3} + 1\frac{x^2-x-2}{-2} + (-1)\frac{x^2+x}{6}$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

Roteiro

Interpolação usando diferenças divididas

Seja $f(x)$ um função tabelada em $x_0, x_1, \ldots, xn$,$n+1$ pontos distintos.

Definimos diferenças divididas por:

$$f[x_0] = f(x_0) \qquad \textbf{(ordem 0)}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \qquad \textbf{(ordem 1)}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \qquad \textbf{(ordem 2)}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \qquad \textbf{(ordem 3)}$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}]}{x_n - x_0} \qquad \textbf{(ordem n)}$$

- Dizemos que $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ é a Diferença Dividida de ordem k da função f(x) sobre os k+1 pontos : $x_0, x_1, \ldots, x_k$
- Tabela de diferenças divididas:
- Dada uma função $f(x)$ e conhecidos os valores que $f(x)$ assume nos pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ podemos construir a tabela:

x_n	ord 0	ord 1	ord 2	ord 3	ord n
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			$f[x_0, x_1, \ldots x_n]$
x_4	$f[x_4]$				
$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$	
				$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	
			$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

- Exemplo:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.2	1.22
1	0.4	1.49
2	0.6	1.82
3	0.8	2.23
4	1.0	2.72

- 1ª ordem:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1.49 - 1.22}{0.4 - 0.2} = 1.35$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{1.82 - 1.49}{0.6 - 0.4} = 1.65$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{2.23 - 1.82}{0.8 - 0.6} = 2.05$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} = \frac{2.72 - 2.23}{1.0 - 0.8} = 2.40$$

- 2ª ordem:

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{1.65-1.35}{0.6-0.2} = 0.75$$

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} = \frac{2.05-1.65}{0.8-0.4} = 1.00$$

$$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2} = \frac{2.40-2.05}{1.0-0.6} = 0.875$$

- 3º ordem:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3] - f[x_0,x_1,x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{1.00 - 0.75}{0.8 - 0.2} = 0.41667$$

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4] - f[x_1,x_2,x_3]}{x_4 - x_1} = \frac{0.875 - 1.00}{1.0 - 0.40} = -0.20833$$

- 4º ordem:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4] - f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4 - x_0}$$
$$= \frac{-0.20833 - 0.41667}{1.0 - 0.2} = -0.78125$$

- Na forma tabelar:

x_n	0	1	2	3	4
0.2	1.22				
		1.35			
0.4	1.49		0.75		
		1.65		0.41667	
0.6	1.82		1.00		−0.78125
		2.05		−0.20833	
0.8	2.23		0.875		
		2.40			
1.0	2.72				

Roteiro

1. **Interpolação**
   - Introdução
   - Interpolação pelos polinômios de Lagrange
   - Interpolação usando diferenças divididas
   - Forma de Newton
   - Estudo do Erro na Interpolação
   - Fenômeno de Runge

Forma de Newton

- Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$.
- Sejam $a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b$,$(n+1)$ pontos.
- Construiremos o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Iniciaremos a construção obtendo $p_0(x)$ que interpola $f(x)$ em $x = x_0$.

- E assim,sucessivamente,construiremos $p_k(x)$ que interpola $f(x)$ em

$x_0, x_1, \ldots, x_k$,$k = 0, 1, \ldots, n$. sendo que
$p_{k+1}(x) = p_k(x) + q_{k+1}(x)$,$k = 0, 1, \ldots, n$.

- Seja $p_0(x)$ o polinômio de grau zero que interpola $f(x)$ em $x = x_0$.
- Então,$p_0(x) = f(x) = f[x_0]$.
- Teremos que,para $\forall x \in [a, b]$,$x \neq x_0$:

$$\begin{aligned}
f[x_0, x] &= \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
(x - x_0).f[x_0, x] &= f(x) - f(x_0) \\
f(x) &= f(x_0) + (x - x_0).f[x_0, x] \\
& \quad p_0(x) \qquad E_0(x) \\
E_0(x) &= f(x) - p_0(x) = (x - x_0)f[x_0, x]
\end{aligned}$$

- Note que $E_0(x) = f(x) - p_0(x)$ é o erro cometido ao se aproximar $f(x)$ por $p_0(x)$.

- Seja agora construir $p_1(x)$,o polinômio de grau 1 que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1.
- Temos que:

$$f[x_0,x_1,x] = f[x_1,x_0,x] = \frac{f[x_0,x] - f[x_1,x_0]}{x - x_1}$$

$$= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - f[x_1,x_0]}{(x - x_1)} = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0).f[x_1,x_0]}{(x - x_1)(x - x_0)}$$

$$f[x_0,x_1,x] = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0).f[x_1x_0]}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f[x_1,x_0]}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1).f[x_0,x_1,x]}_{E_1(x)}$$

- Assim:

$$p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0]$$
$$E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1).f[x_0, x_1, x]$$

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1).f[x_0, x_1, x_2]$$
$$E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).f[x_0, x_1, x_2, x]$$

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio para $(x_0, x_1, x_2, x_3); (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4); \ldots; (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$ teremos a forma de Newton para o polinômio de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ em $x_0, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} p_n(x) =& f(x_0) + (x - x_0).f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1).f[x_0, x_1, x_2] + \ldots \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] + E_n(x) \\ E_n(x) =& (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \end{aligned}$$

- Exemplo:

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0).f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

- Tabela:

x	0	1	2
-1	4		
		-3	
0	1		$2/3$
		-1	
2	-1		

$$p_2(x) = 4 + (x+1)(-3) + (x+1)(x-0).2/3$$
$$p_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

- Exemplo:

Dada a tabela abaixo, determinar o valor interpolado para $x = 0.4$

i	xi	0	1	2	3	4
0	0.1	1.115				
			1.46			
1	0.2	1.261		1.60		
			1.78		0.325	
2	0.3	1.439		1.73		-0.5
			2.30		0.075	
3	0.5	1.899		1.76		
			2.83			
4	0.6	2.182				

$$
\begin{aligned}
p(0.4) = 1.115 + {} & (0.4-0.1)1.46 + \\
& (0.4-0.1)(0.4-0.2)1.6 + \\
& (0.4-0.1)(0.4-0.2)(0.4-0.3)0.325 + \\
& (0.4-0.1)(0.4-0.2)(0.4-0.3)(0.4+0.5).(-0.5) \\
={} & 1.65125
\end{aligned}
$$

- Forma de Newton-Gregory para o polinômio interpolador
- Def. Sejam $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ pontos que se sucedem com passo h, i.e. $x_j = x_0 + jh$.

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\
\Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\
&\ldots \\
\Delta^n f(x) &= \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)
\end{aligned}
$$

com $\Delta^0 f(x) = f(x)$.

- Tabela:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
x_0	$f(x_0)$		
		$\Delta f(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$
		$\Delta f(x_1)$	
x_2	$f(x_2)$		$\dots$
		$\Delta f(x_2)$	
x_3	$f(x_3)$		$\dots$
		$\dots$	
$\dots$	$\dots$		

- Exemplo:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-1	2			
		-1		
0	1		2	
		1		0
1	2		2	
		3		0
2	5		2	
		5		
3	10			

- Teorema:
- Se $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ então

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}$$

- O polinômio de interpolação:
- Se $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, o teorema anterior nos fornecerá, para forma de Newton.

$$\begin{aligned} p_n(x) = f(x_0) &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \\ &+ \ldots + \\ &+ (x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Assim,

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = f(x_0) &+ \frac{(x-x_0)\Delta f(x_0)}{h} + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} + \\
&+ \ldots + \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}
\end{aligned}
$$

- Forma de Newton Gregory do polinômio de interpolação de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ igualmente espaçados.

- Exemplo:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
-1	2			
		-1		
0	1		2	
		1		0
1	2		2	
		3		0
2	5		2	
		5		
3	10			

$$p_4(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)\Delta f(x_0)}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 f(x_0)}{2h^2} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).\Delta^3 f(x_0)}{6h^3} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\Delta^4 f(x_0)}{24h^4}$$

$$h = 1 \quad f(x_0) = 2$$

$$\Delta f(x_0) = -1 \quad \Delta^2 f(x_0) = 2 \quad \Delta^3 f(x_0) = 0 \quad \Delta^4 f(x_0) = 0$$

$$
\begin{aligned}
p_4(x) &= 2 - (x+1) + (x+1)(x-0)2/2 + 0 + 0 \\
&= 2 - x - 1 + x^2 + x = x^2 + 1 \\
p4(0,5) &= (0.5)2 + 1 = 0.25 + 1 = 1.25 = f(0.5)
\end{aligned}
$$

- Observe que o polinômio resultante é de grau 2!

- Podemos simplificar a expressão:
- Seja $s = \dfrac{x - x_0}{h}$, $x = s.h + x_0$

$$x - x_j = s.h + x_0 - (x_0 + j.h) = s.h - j.h = (s - j)h$$

- Fórmula Newton-Gregory

$$p_n(s) = f(x_0) + s\Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)\Delta^2 f(x_0)}{2} + \\ + \cdots + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-(n-1))\Delta^n f(x_0)}{n!}$$

Para o exemplo anterior:

$$h = 1, f(x_0) = 2, \Delta f(x_0) = -1, \Delta^2 f(x_0) = 2, \Delta^3 f(x_0) = \Delta^4 f(x_0) = 0$$

$$\begin{aligned} p_2(s) &= f(x_0) + s\Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)\Delta^2 f(x_0)}{2} + 0 \\ &= 2 - s + (s^2 - s)2/2 \\ &= s^2 - 2s + 2 \end{aligned}$$

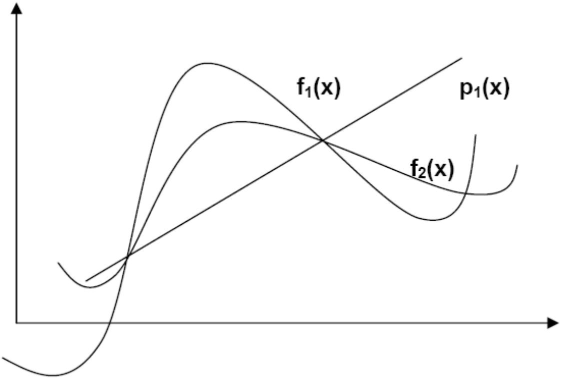
$$x = 0.5 \rightarrow s = 0.5 - (-1) = 1.5$$

$$p_2(1.5) = 1.52 - 2(1.5) + 2 = 1.25$$

Roteiro

Estudo do Erro na Interpolação

- Quando aproximamos $f(x)$ por $p_n(x)$ temos um erro.
- $E_n(x) = f(x) - p_n(x)$ por $\forall x$ nos intervalos $[x_0, x_n]$
- Caso de interpolação linear:



- O mesmo polinômio $p_1(x)$ interpola $f_1(x)$ e $f_2(x)$ em x_0, x_1

$$E_1^1(x) = f_1(x) - p_1(x)$$
$$E_1^2(x) = f_2(x) - p_1(x)$$

$$E_2^2(x) < E_1^1(x)$$

- O erro depende da concavidade das curvas, ou seja, de $f_1''(x)$ e $f_2''(x)$.

- Teorema (Erro de Truncamento):

Sejam $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $n + 1$ pontos.
Seja $f(x)$ com derivadas até ordem $(n + 1)$ para $x \in [x_0, x_n]$.
Seja $p_n(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Então em qualquer ponto x pertencente ao intervalo $[x_0, x_n]$ o erro é dado por:

$$\begin{aligned} E_n(x) &= f(x) - p_n(x) \\ &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) f^{n+1}(\xi)}{(n + 1)!} \end{aligned}$$

Onde $\xi \in (x_0, x_n)$

- Prova: Ruggiero

- O erro de truncamento diminui quando n aumenta.
- Sabemos também que o erro de arredondamento aumenta a medida que n aumenta pois temos mais computação a fazer.
- Dessa forma, não é suficiente aumentar o grau polinômio interpolante para aumentarmos a exatidão do resultado!
- Em geral não se tem $f(x)$ e não se pode portanto calcular $\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$
- Pode-se estimar este termo pelo máximo dos módulos diferenças divididas de ordem $n+1$.

- Exemplo: Seja a tabela abaixo

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
$f(x)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

a) Obter f(0.47) usando um polinômio de grau 2

b) Dar uma estimativa de erro.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0.2	0.16			
		0.4286		
0.34	0.22		2.0235	
		0.83333		−17.8963
0.4	0.27		−3.7033	
		0.1667		18.2494
0.52	0.29		1.0415	
		0.375		−2.6031
0.6	0.32		0.2085	
		0.4167		
0.72	0.37			

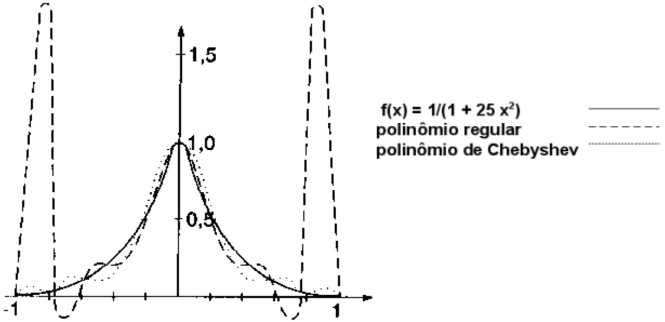
- Deve-se escolher 3 pontos para interpolação. Como 0.47 está entre $(0.4, 0.52)$ tomaremos esses dois pontos. e o outro pode ser tanto 0.34 como 0.6 (eqüidistante). Tomaremos 0.6.

$$p_2(x) = 0.27 + (x - 0.4)0.1667 + (x - 0.4).(x - 0.52)1.0415$$
$$p_2(0.47) = 0.2780$$
$$E_2(x) = |(x - 0.4).(x - 0.52).(x - 0.6)|.max|\text{dif. divididas de ordem } n + 1|$$
$$E_2(x) = |(x - 0.4).(x - 0.52).(x - 0.6)|.18.2492 = 8,303.10^{-3}$$

Roteiro

Fenômeno de Runge

- Seja $p_n(x)$, o polinômio de interpolação em $[x_0, x_n]$ de $f(x)$.
- Se $(x_0, \cdots, x_n)$ cobre intervalo $[a, b]$ ou se $n \to \infty$, $p_n(x)$ converge para $f(x)$?
- Exemplo: $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$



- Teorema:
- Para qualquer conjunto (x_i, y_i) existe uma função contínua g e para algum $x \in [a, b]$ tal que $p_n(x)$ não coverge a $g(x)$, quando $n \to \infty$.

- Existem duas alternativas:
  - Aproximar por uma outra função não polinomial por exemplo: $f(x) = 1/p_2(x)$
  - Trocar aproximações com pontos igualmente espaçados por aproximações em nós de Chebyshev:

$$x_i = \frac{x_0 + x_n}{2} + \frac{x_n - x_0}{2}\xi_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

$$\xi_i = cos\left(\frac{2i+1}{2n+1}\pi\right)$$

Esse espaçamento distribui mais homogeneamente o erro.