CCI-22

Prof. Celso HIRATA

Sala 116 Tel. 347 5987

E mail : hirata@comp.ita.br

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Departamento de Computação Científica

Divisão de Ciência da Computação

14 de dezembro de 2007

Roteiro

Roteiro

Objetivos

- Utilizar os métodos numéricos de acordo com as características teóricas de exatidão e condições de aplicabilidade ao problema modelado;
- Analisar e criticar resultados numéricos em função das características de cada método;
- Desenvolver programas que usem sempre a diminuição dos erros de arredondamento ou truncamento de cada método.

Roteiro

Avaliação

- 4 Provas
- Séries
- 6 Laboratórios em Grupo
- 1 Exame Final

Avaliação

Primeiro Bimestre:

$0,5.\text{Provas} + 0,1.\text{Séries} + 0,4.\text{Labs}$

Segundo Bimestre:

$0,5.\text{Provas} + 0,1.\text{Séries} + 0,4.\text{Labs}$

Exame:

$0,8.\text{Exame} + 0,2.\text{Lab}$

Roteiro

1. **Ementa**
   - Objetivos
   - Avaliação
   - Bibliografia
   - Caraga Horária Semanal
   - Tópicos
2. **Representação de Dados**
   - Representação
   - Mudança de Base
   - Representação de Números Inteiros
   - Representação de Números Reais

Bibliografia

1. Ruggiero, M.A.C. & Lopes. V. Cálculo Numérico, Aspectos Teóricos e Computacional. MacGraw Hill, São Paulo, 1987
2. Cláudio, D.M. & Marins J.M. Cálculo Numérico Computacional. Atlas. São Paulo 1994 2 ed.
3. Notas de Aula.

Roteiro

Carga Horária Semanal

Aula de teoria e exercícios	Laboratório	Horas de estudo
3	3	6

Roteiro

Tópicos

1. Representação de dados
2. Introdução ao estudo de matemática numérica
3. Introdução à aritmética de máquina
4. Resolução de sistemas lineares
5. Resolução de sistemas não lineares
6. Interpolação
7. Ajuste de funções
8. Integração numérica
9. Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias

Roteiro

Parte inteira na base decimal:

$$
\begin{aligned}
4583 &\Rightarrow 4000 + 500 + 80 + 3 \\
&\Rightarrow 4.10^3 + 5.10^2 + 8.10^1 + 3.10^0 \\
x &= (d_n d_{n-1} d_{n-2} \ldots d_2 d_1 d_0)_{10} \\
&= d_n.10^n + d_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + d_2.10^2 + d_1.10^1 + d_0.10^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} d_k 10^k \; d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}
\end{aligned}
$$

Parte inteira em base genérica:

$$\sum_{k=0}^{n} d_k b^k$$

Parte Fracionária em Base Decimal

$$
\begin{aligned}
frac[x] &= 0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}\ldots = d_{-1}.10^{-1} + d_{-2}.10^{-2} + \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k}10^{-k}
\end{aligned}
$$

Exemplos:

$$
\begin{aligned}
1/8 &= 0,125 = 1.10^{-1} + 2.10^{-2} + 5.10^{-3} \\
1/3 &= 0.333 = 3.10^{-1} + 3.10^{-2} + 3.10^{-3} + \ldots
\end{aligned}
$$

Parte Inteira e Fracionária em Base Genérica

Seja $x = d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 . d_{-1} \ldots$

$$\sum_{u=n}^{-\infty} d_u . b^u, 0 \leq d_i \leq b - 1$$

Números Representados Em Diferentes Bases

b=2	b=8	b=10	b=16
00000	00	00	00
00001	01	01	01
00010	02	02	02
00011	03	03	03
00100	04	04	04
00101	05	05	05
00110	06	06	06
00111	07	07	07
01000	10	08	08
01001	11	09	09
01010	12	10	A
01011	13	11	B
⋮	⋮	⋮	⋮
01111	17	15	F

Roteiro

1 **Ementa**
- Objetivos
- Avaliação
- Bibliografia
- Caraga Horária Semanal
- Tópicos

2 **Representação de Dados**
- Representação
- Mudança de Base
- Representação de Números Inteiros
- Representação de Números Reais

Mudança de Base

Parte Inteira

$(x)_b \rightarrow (x)_{10}$ e $(x)_{10} \rightarrow (x)_b$

$$
\begin{aligned}
x &= (d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1 d_0) \\
&= d_n b^n + d_{n-1} b^{n-1} + \ldots + d_1 b^1 + d_0
\end{aligned}
$$

Mudança de Base

Mudança de base qualquer para base decimal

$$
\begin{aligned}
(11011)_2 &= (x)_{10} \\
&= 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 \\
&= 16 + 8 + 0 + 2 + 1 \\
&= 27 \\
(7501)_8 &= (x)_{10} \\
&= 7.8^3 + 5.8^2 + 0.8^1 + 1.8^0 \\
&= 3905
\end{aligned}
$$

Mudança de Base

Mudança de base qualquer para base decimal

$$
\begin{aligned}
(2AB)_{16} &= (x)_{10} \\
&= 2.16^2 + A.16^1 + B.16^0 \\
&= 683
\end{aligned}
$$

Mudança de Base

Mudança de base de decimal para base qualquer

$(135)_{10} = (x)_2$

Divisor	/	Dividendo	Resto
2	/	135	1
2	/	67	1
2	/	33	1
2	/	16	0
2	/	8	0
2	/	4	0
2	/	2	0
2	/	1	1
2	/	0	0

$\rightarrow (10000111)_2$

Mudança de Base

Mudança de base de decimal para base qualquer

$(92)_{10} = (x)_8$

Divisor	/	Dividendo	Resto
8	/	92	4
8	/	11	3
8	/	1	1
8	/	0	0

$\rightarrow (134)_8$

Mudança de Base

Mudança de base de decimal para base qualquer

$(2653)_{10} = (x)_{16}$

Divisor	/	Dividendo	Resto
16	/	2653	13
16	/	165	5
16	/	10	10

$\rightarrow (A5D)_{16}$

Mudança de Base

Números Reais

$$
\begin{aligned}
(0.1011)_2 &= (x)_{10} \\
&= 1.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.2^{-3} + 1.2^{-4} \\
&= (0.6875)_{10} \\
(0.1)_8 &= (x)_{10} \\
&= 1.8^{-1} \\
&= (0.125)_{10}
\end{aligned}
$$

Mudança de Base

Números Reais

$$
\begin{aligned}
(0.2A)_{16} &= (x)_{10} \\
&= 2.16^{-1} + 10.16^{-2} \\
&= (0.164)_{10}
\end{aligned}
$$

Mudança de Base

$$0.125 = (x)_2 \rightarrow \begin{array}{r} 0.125 \\ 2 \\ \hline \underline{0}.250 \\ 2 \\ \hline \underline{0}.500 \\ 2 \\ \hline \underline{1}.000 \end{array} \rightarrow x = 0.001$$

Mudança de Base

$$
(0.3)_{10} = (x)_2 \rightarrow
\begin{array}{rr}
0.3 & \underline{0}.8 \\
2 & 2 \\
\hline
\underline{0}.6 & \underline{1}.6 \\
2 & 2 \\
\hline
\underline{1}.2 & \underline{1}.2 \\
2 & 2 \\
\hline
\underline{0}.4 & \\
2 & \\
\hline
\underline{0}.8 &
\end{array}
\rightarrow x = 0.0100110011\ldots
$$

Mudança de Base

$$(0.845)_{10} \rightarrow (x)_{16} \rightarrow \begin{array}{ccc} 0.845 & 0.52 & 0.32 \\ 16 & 16 & 16 \\ \hline \underline{13}.52 & \underline{8}.32 & \underline{5}.12 \end{array} \rightarrow x = 0.D85$$

Mudança de Base

Bases Exponenciais de 2: 2, 4, 8 e 16

$$(10111101.001)_2 = \underline{1011}\ \underline{1101}.\underline{0010} \rightarrow \begin{array}{c} 1011 \text{ - B} \\ 1101 \text{ - D} \\ 0010 \text{ - 2} \end{array} \rightarrow (BD.2)_{16}$$

Mudança de Base

Bases Exponenciais de 2: 2, 4, 8 e 16

$$(A01.2)_{16} = (x)_2 \quad \begin{array}{c} \text{A - 1010} \\ \text{0 - 0000} \\ \text{1 - 0001} \\ \text{2 - 0010} \end{array} \quad \rightarrow (1010\ 0000\ 0001.\ 001)_2$$

Mudança de Base

Bases Exponenciais de 2: 2, 4, 8 e 16

6 - 110

7 - 111

$(67.03)_8 = (x)_2 \quad \rightarrow (110\ 111.\ 000\ 011)_2$

0 - 000

3 - 011

Mudança de Base

Bases Exponenciais de 2: 2, 4, 8 e 16

$$(10110111.01101)_2 = (x)_8$$

$$\begin{array}{cccccc} \underline{010} & \underline{110} & \underline{111} & . & \underline{011} & \underline{010} \\ 2 & 6 & 7 & & 3 & 2 \end{array} \rightarrow (267.32)_8$$

Roteiro

Representação de Números Inteiros

- Os computadores geralmente usam uma caixa com tamanho pré-fixado em m bits chamada "palavra". O primeiro bit é o bit do sinal e os bits restantes contêm o módulo.

Bit sinal: $0 \rightarrow$ positivo e $1 \rightarrow$ negativo

- Para representar os números inteiros, têm-se duas formas:
  - Representação pelo módulo
  - Representação por complemento de 2

Representação de Números Inteiros

Representação pelo módulo

Sinal+Magnitude: O primeiro bit a esquerda é o “bit-sinal”. Os bits restantes representam o módulo do número.

Exemplo: $m = 4$

+0 = 0 000	-0 = 1 000	+4 = 0 100	-4 = 1 100
+1 = 0 001	-1 = 1 001	+5 = 0 101	-5 = 1 101
+2 = 0 010	-2 = 1 010	+6 = 0 110	-6 = 1 110
+3 = 0 011	-3 = 1 011	+7 = 0 111	-7 = 1 111

$2^{m-1} - 1$ representações

Representação de Números Inteiros

Representação pelo módulo - Desvantagens

- Possuem 2 representações pra o zero
- Problemas de analiticidade

Ex.: $5 - 2 = 5 + (-2)$

$$\begin{array}{r} 0101 \\ 1010 \\ \hline 1111 \end{array}$$

Representação de Números Inteiros

Representação pelo Complemento de 2

- O primeiro bit a esquerda é o “bit-sinal”.
- Os bits restantes sofrem o seguinte tratamento:
  - Se o número for positivo, eles conterão seu módulo.

    Exemplo: $5 \rightarrow \underline{0}\,101$
  - Se o número for negativo, eles conterão o seu “módulo complementado” somado de um. O bit sinal é 1.

Representação de Números Inteiros

Representação pelo Complemento de 2

Exemplo: -5 (com 4 bits)

Módulo:	101	
Módulo complementado:	010	$-5 \rightarrow 1011$
Módulo complementado+1:	011	

Representação de Números Inteiros

Representação pelo Complemento de 2

Exemplo: $m = 4$

0	0 000	-1	1 111
+1	0 001	-2	1 110
+2	0 010	-3	1 101
+3	0 011	-4	1 100
+4	0 100	-5	1 011
+5	0 101	-6	1 010
+6	0 110	-7	1 001
+7	0 111	-8	1 000

Representação de Números Inteiros

Representação pelo Complemento de 2

Pode-se representar todos os inteiros de:

$0 \leq x \leq 2^{m-1} - 1$ (positivos+0) e

$-2^{m-1} \leq x < 0$ (negativos)

$$\text{ou } -2^{m-1} \leq x \leq 2^{m-1} - 1$$

Representação de Números Inteiros

Aritmética do Complemento de 2

$m = 4 \rightarrow -8 \leq x \leq 7$

$5 + 2 = 7$

$$\begin{array}{l} 0101 \\ \underline{0010} \\ 0111 \quad \rightarrow +7 \end{array}$$

$5 - 6 = 5 + (-6) = -1$

$$\begin{array}{l} 0101 \\ \underline{1010} \\ 1111 \quad \rightarrow -1 \end{array}$$

Representação de Números Inteiros

Aritmética do Complemento de 2

		1011	
$-5 - 1 = -6$		$\underline{1111}$	
	2 carries	$\underline{11}010$	$\rightarrow -6$
		0101	
$5 + 6 = 11$		$\underline{0110}$	
	1 carry	$\underline{1}011$	$\rightarrow -5$ ocorreu overflow
		1011	
$-5 - 6$		$\underline{1010}$	
	1 carry	$\underline{1}0101$	$\rightarrow -5$ ocorreu overflow

Representação de Números Inteiros

Operação Inversa de Complemento de 2

Exemplo: 1011 (m=4)

1 $\underline{011}$

011: módulo complementado + 1

010: módulo complementado $\rightarrow (-5)_{10}$

101: módulo

Roteiro

Representação de Números Reais

$X = 0, < \text{MANTISSA} > . < \text{BASE} >^{<\text{expoente}>}$

- A base é uma potência de 2.
- Armazenando-se separadamente o <u>expoente</u> e a <u>mantissa</u> e esta última é truncada de forma caber no número de bits disponíveis.
- A mantissa deve ser <u>normalizada</u>. Os seus n primeiros bits (n referente à base) formam um número diferente de zero.

Representação de Números Reais

Exemplo:

1. Se $b = 2$, $n = 2$ para $0.011.2^{-1} \rightarrow 0.11\ .\ 2.^{-2}$

2. Se $b = 16$, $n = 4$,

   $(0\ .\ \underline{0000}\ 0011)_2.16^{-2} = (0.03)_{16}.16^{-2} \rightarrow (0.3)_{16}.16^{-3}$ (normalizada)

Representação de Números Reais

Representação de um Número (32 bits) IBM S/370

- 7 bits para característica
- 24 bits para mantissa

Característica: expoente do número normalizado $+ 2^6$

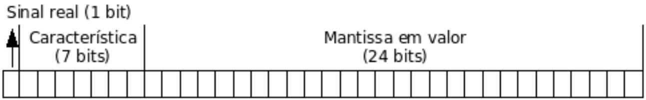
$0 \leq \text{característica} \leq 127$

$-64 \leq \text{expoente} \leq 63$

$0 \leq \text{mantissa} \leq 1$

Representação de Números Reais

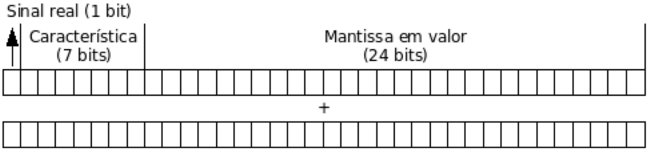
Precisão curta: uma palavra (32 bits)



- Limitações:
  - Precisão: 24 dígitos binários, ou 6 dígitos hexadecimais ou aproximadamente 8 dígitos decimais.
  - Magnitude: $16^{-65} \leq |N| < 16^{63}$ ou seja aproximadamente $54.10^{-79} \leq 7.2.10^{75}$

Representação de Números Reais

Precisão longa: duas palavras (64 bits)



- Precisão: 56 dígitos binário ou aproximadamente 17 casas decimais

Representação de Números Reais

Precisão longa: duas palavras (64 bits)

Exemplo:

$(2.3)_{10} = (10.0100110011\ldots)_2 = (2.4CCCC\ldots)_{16} = (0.24CCCC\ldots)16^1$

mantissa = $(\ 0010\ 0100\ 1100\ 1100\ 1100\ 1100\ )_2$

característica = $1 + 26 = 65 = 1000001$

representação = $\underbrace{0}_{\text{bit sinal}}\ \underbrace{1000001}_{\text{caract.}}\underbrace{001001001100110011001100}_{\text{mantissa}}$