CCI-22

Prof. Celso HIRATA

Sala 116 Tel. 347 5987

E mail : hirata@comp.ita.br

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Departamento de Computação Científica

Divisão de Ciência da Computação

13 de dezembro de 2007

Roteiro

Roteiro

Introdução

- Matemática Computacional:

  Estudo da matemática sob o ponto de vista computacional constitui a matemática computacional.

- Matemática Numérica:

  Desenvolvimento dos métodos operacionais construídos para a resolução aproximada de problemas que podem ser representados por um métodos matemático.

- Matemática Simbólica:

  Trata com modelos de forma literal e busca uma solução analítica exata para os problemas matemáticos.

- Matemática Gráfica:

  Trabalha com dados de forma gráfica e busca representar a solução dos seus problemas também na forma gráfica.

- Matemática Intervalar:

  Trata com dados na forma intervalos numéricos buscando controlar os limites de erro dos processos da Matemática de forma 100% confiável.

Caraterísticas Desejáveis de Algoritmos Numéricos

- Inexistência do erro lógico
- Quantidade finita de cálculos
- Existência de um critério de exatidão
- Independência da máquina
- Eficiência

Etapas para resolução de um Problema

1. Problema Real - Levantamento de Dados
2. Construção do Modelo Matemático
3. Escolha do Método Numérico Adequado
4. Implementação Computacional
5. Análise dos Resultados
6. Se necessário:

   Reformular o Modelo Matemático e/ou

   Escolher Novo Método Numérico!

Roteiro

Introdução a Aritmética de Máquina

- Sistema de Ponto Flutuante
- Arredondamento
- Erros
- Dígitos Significativos Exatos (DIGSE)
- Precisão e Exatidão de Máquinas Digitais

Sistema de Ponto-Flutuante

- Exemplo:

$$\begin{aligned}
H &= 1.0/2.0 \\
X &= 2.0/3.0 - H \\
Y &= 3.0/5.0 - H \\
E &= (x + x + x) - H \\
F &= (y + y + y) - H \\
G &= F/E
\end{aligned}$$

HP	Texas	IBM S/370
A (HP 25)	B (SR50)	C (IBM 4341)
H = 0.5	H = 0.5	H = 0.5
X = 0.166 666 667	X = 0.166 666 667	X = 0.166 666
Y = 0.1	Y = 0.1	Y = 0.1
E = 1.0 E-10	E = 2.0 E-13	E = 0.119 209 E-6
F = 0	F = 0	F = 0.178873 E-6
G = ?	G = ?	G = 0.666 …

Definição

Um número real, $x \in \mathbb{R}$ *é dito um número de ponto flutuante normalizado se valerem:*

- $x = m.b^e$
- $m = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \cdots d_n\,, \quad n \in N$
- $1 \leq d_1 \leq b-1\,,\ 0 \leq d_i \leq b-1\,, \quad i = 2, \cdots, n$
- $e_1 \leq e \leq e_2\,, \quad e_1 \leq 0\,,\ e_2 \geq 1\,, \quad e_1, e_2 \in \mathbb{Z}$

Definição

A união de todos os números de ponto flutuante, incluindo o zero, é chamado de sistema de ponto flutuante.

Um sistema de ponto flutuante é definido pela quádrupla $F(b, n, e_1, e_2)$.

- Obs: O zero é representado na seguinte forma:

$$0 = \underbrace{0.00 \cdots 0}_{n \text{ vezes}} \, . \, b^{e_1}$$

- Exemplos:

$F(10, 9, -98, 100)$	HP 25
$F(10, 10, -98, 100)$	Texas SR50
$F(16, 6, -64, 63)$	IBM 370
$F(8, 13, -51, 77)$	B6700

- No Sistema de Ponto Flutuante (SPF) $F(b, n, e_1, e_2)$:
  - O menor número representável é $0.100 \cdots 0 \, . \, b^{e_1}$
  - O maior número representável é $0.[b-1][b-1] \cdots [b-1] \, . \, b^{e_2}$
  - O número de representações, indicado por $\#F$, é dado por:

$$\underbrace{2}_{negativos} .(b-1)(b^{n-1}).(e_2 - e_1 + 1) + \underbrace{1}_{zero}$$

- Exemplo: $F = F(2, 3, -1, 2)$
- Mantissas possíveis são: $0.100 \quad 0.101 \quad 0.110 \quad 0.111$
- Expoentes : $-1, 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
0.100.2^{-1} &= (0.01)_2 = 0.2^0 + 0.2^{-1} + 1.2^{-2} \\
&= 1/4 \\
0.100.2^0 &= 1/2 \\
0.100.2^1 &= 1 \\
0.100.2^2 &= 2
\end{aligned}$$

e	b^e	0.100	0.101	0.110	0.111
-1	$1/2$	$1/4$	$5/16$	$3/8$	$7/16$
0	1	$1/2$	$5/8$	$3/4$	$7/8$
1	2	1	$5/4$	$3/2$	$7/4$
2	4	2	$5/2$	3	$7/2$

(Números Positivos Apenas)

- Então $\#F = 2.(2-1).23 - 1.(2-(-1)+1)+1 = 2.1.4.4+1 = 33$
- Região de underflow : $(-1/4, 0) \cup (0, 1/4)$
- Região de overflow : $(-\infty, -7/2) \cup (7/2, \infty)$
- Seja $x = 5/4$, $y = 3/8$

então $x + y = 5/4 + 3/8 = 13/8$

contudo $13/8 \notin F$ pois $13/8 = (0.1101.21)_2$

- Pode ser que $x \oplus y \neq x + y$, onde $x \oplus y$ é a operação usando a representação

do computador.

- Exemplo: $F = F(3,2,-1,2)$

e	b^e	0.10	0.11	0.12	0.20	0.21	0.22
-1	$1/3$	$1/9$	$4/27$	$5/27$	$2/9$	$7/27$	$8/27$
0	1	$1/3$	$4/9$	$5/9$	$2/3$	$7/9$	$8/9$
1	3	1	$4/3$	$5/3$	2	$7/3$	$8/3$
2	9	3	4	5	6	7	8

- $\#F = 2.(3-1).32 - 1.(2-(-1)+1)+1 = 49$
- Região de underflow : $(-1/9, 0) \cup (0, 1/9)$
- Região de overflow : $(-\infty, -8) \cup (8, \infty)$
- Exercício: Ache dois números x e y tais que $x \oplus y \neq x + y$

Roteiro

Arredondamento

Definição

Seja $F = F(b, n, e_1, e_2)$ um SPF. uma função $\xi : \mathbb{R} \rightarrow F$ e dito um arredondamento se vale $\forall x \in F$, $\xi x = x$.

- Tipos de arrendondamento:
  - para cima ou por excesso: Δx
  - para baixo ou por falta: ∇x
  - para o número de máquina mais próximo: $\bigcirc x$

- Exemplo: $F = F(2, 3, -1, 2)$
- Número real $9/8 \notin F$ pois $9/8 = -(1.125)_{10} = (0.1001.21)_2$
- $9/8$ pode ser arrendondado para:
  - $0.100.2^1$ que é $(1.0)_{10}$
  - $0.101.2^1$ que é $(5/4)_{10}$

- Exemplo: $F = F(10, 4, -98, 10)$

$$
\begin{array}{llll}
x = 0.333333 & y = 0.348436 & z = 0.666666 & w = 0.12345 \\
\Delta x = 0.3333 & \Delta y = 0.3484 & \Delta z = 0.6666 & \Delta w = 0.1234 \\
\nabla x = 0.3334 & \nabla y = 0.3485 & \nabla z = 0.6667 & \Delta w = 0.1235 \\
\mathrm{O}\, x = 0.3333 & \mathrm{O}\, y = 0.3484 & \mathrm{O}\, z = 0.6667 & \mathrm{O}\, w = 0.1235
\end{array}
$$

Definição

Um arredondamento $\xi : R \to F$ *onde* $F = F(b, n, e_1, e_2)$

- *É dito por falta* (∇) *se vale* $\forall x \in \mathbb{R},\ \nabla x \leq x$
- *É dito por excesso* (Δ) *se vale* $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq \Delta x$
- *Se além disso vale* $\forall x, y \in R,\ x \leq y \Rightarrow \xi x \leq \xi y$, *que é chamada propriedade monotônica.*
- *É dito para o número de máquina mais próximo* (O) *se vale:*
  - $\forall x \in [0, b^{e_1 - 1}], \mathrm{O}\, x = 0$
  - $\forall x \in [b^{e_1 - 1}, B], \mathrm{O}\, x = \begin{cases} \Delta x & se\ x \in [\Delta x, \dfrac{\Delta x + \nabla x}{2}) \\ \nabla x & se\ x \in [\dfrac{\Delta x + \nabla x}{2}, \nabla x] \end{cases}$

  onde $B = 0.[b-1][b-1]\cdots[b-1].b^{e_2}$

Roteiro

1. **Introdução ao Estudo da Matemática Numérica**
   - Introdução
   - Introdução a Aritmética de Máquina
   - Arredondamento
   - Erros
   - Dígitos Significativos Exatos (DIGSE)
   - Precisão, Exatidão e Epsilon de Máquinas Digitais

Erros

- Inerentes
- Discretização
- Arredondamento

- Inerentes:
  - Criação ou simplificação de um modelo matemático.
  - Nas medidas em geral.
- Discretização (Aproximação, Truncamento):

Exemplo: $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$

- Arredondamento:
  - Surgem quando trabalhamos com máquinas digitais para representar os números reais.
  - A diferença entre o valor arredondado e o valor exato pode ser medida pelo erro absoluto (E_A) ou relativo (E_R).

Definição

O erro absoluto, indicado por E_A*, é dado por:*

$$E_A = |\xi x - x|$$

Definição

O erro relativo, indicado por E_R*, é dado por:*

$$E_R = \frac{|\xi x - x|}{\xi x}$$

- Exemplo: $x = 0.00006$, $\xi x = 0.00005$

$$E_A = 0.00001$$

$$E_R = \frac{0.00001}{0.00005} = 0.2\ (20\%)$$

Teorema

Seja $F = F(b, n, e_1, e_2)$ *um sistema de ponto flutuante e* ξ *um arredondamento, então vale:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ b^{e_1 - 1} \leq |x| \leq B \Rightarrow \frac{|\xi x - x|}{|\xi x|} \leq \mu]$$

onde:

$$\mu = \begin{cases} \dfrac{b^{1-n}}{2} & , se\ \xi x = \mathrm{O}\, x \\ b^{1-n} & , se\ \xi x = \nabla x \end{cases}$$

- Exemplo: $\xi = O$ e para $b = 10, n = 10$:

$$\mu = \frac{1.10^{-9}}{2} = 0.0000000005 (\text{unidade de erro de arredondamento})$$

- Ou seja, dentro do intervalo de representação da máquina, o erro relativo é pequeno.

Roteiro

Dígitos Significativos Exatos (DIGSE)

Definição

Num sistema decimal, um digito é significativo se qualquer dos dígitos for 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9. O dígito 0 (zero) é significativo, exceto quando for usado para fixar a vírgula ou ponto decimal ou preencher o lugar de dígitos descartados.

- Exemplo:

$$\begin{aligned} 0.008735 &\rightarrow \text{4 dígitos significativos} \\ 30.457 &\rightarrow \text{5 dígitos significativos} \\ 23.000 &\rightarrow \text{2 dígitos significativos} \end{aligned}$$

Definição

Um dígito significativo é exato se, arredondando-se o número aproximado para uma posicão imediatamente após aquela posição do dígito, isso fizer com que o erro absoluto não seja maior que a meia unidade naquela posição do dígito.

- Exemplo: $x = 2/3$ e $\xi x = 0.666\,67$
  - No 1º dígito 6 ficamos com o número 0.66 e o erro absoluto em relação a $2/3$ é : $|0.66 - 0.666\ldots| = 0.006\,66\ldots < 0.05$
  - No 2º dígito 6: $|0.666 - 0.666\ldots| = 0.000\,666\ldots < 0.005$
  - No 3º dígito 6: $|0.666\,6 - 0.666\ldots| = 0.000\,066\,6\ldots < 0.000\,5$
  - No 4º dígito 6: $|0.666\,67 - 0.666\ldots| = 0.000\,003\,333\ldots < 0.000\,05$
  - No dígito 7: $|0.666\,670 - 0.666\ldots| = 0.000\,003\,333\ldots < 0.000\,005$
- Então todos os dígitos significativos são exatos .

- Exemplo: $x = 2/3$ e $\xi x = 0.666\,998$
    - 1^{o} dígito 6: $|0.66 - 0.666\ldots| = 0.006\,666\ldots < 0.05$
    - 2^{o} dígito 6: $|0.666 - 0.660\ldots| = 0.000666\ldots < 0.005$
    - 3^{o} dígito 6: $|0.666\,9 - 0.666\ldots| = 0.000\,233\ldots < 0.000\,5$
    - p/ dígito 9: $|0.666\,99 - 0.666\ldots| = 0.000\,323 > 0.000\,05$
- Dígito 9 não é exato!

Teorema

Se $E_R \leq \dfrac{b^{-m}}{2}$, *então o número é correto em "m" dígitos significativos exatos.*

$$m = -\left(0.3 + log\left(\mu + \frac{|x - \xi x|}{|x|}\right)\right)$$

Número de dígitos significativos exatos de x_{i+1} *em relação à* x_i:

$$\text{DIGSE}(x_i, x_{i+1}) = -\left(0.3 + log\left(\mu + \frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_i|}\right)\right)$$

μ: *unidade de erro de arredondamento.*

Roteiro

Precisão, Exatidão e Epsilon de Máquinas Digitais

Definição

Precisão de uma máquina digital é definida como o número de dígitos da mantissa dessa máquina.

Definição

Exatidão é uma medida de perfeição do resultado.

Exatidão de um resultado depende da precisão da máquina e o método utilizado.

- Exemplo: $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$
  - 1.4142 é mais preciso e mais exato que 1.41, pois o primeiro tem maior número de casas e aproxima melhor $\sqrt{2}$.
  - 1.4149 é mais preciso pois tem mais casas decimais, porém é menos exato que 1.414, pois o dígito 9 do primeiro não é exato!
- Epsilon da Máquina, representado por ϵ, dá uma idéia da precisão da máquina. O ϵ da máquina é o menor número de ponto flutuante tal que: $1 + \epsilon > 1$.

```
Program Calcula_Epsilon_de_Maquina;
VAR EPSILON, EPS: REAL
Begin
   ESP := 1,
   REPEAT
      EPSILON  := EPS;
      EPS := 0.5 * EPS
   UNTIL EPS + 1 = 1
   Writeln (EPSILON)
END.
```