CCI-22

Prof. Celso HIRATA

Sala 116 Tel. 347 5987

E mail : hirata@comp.ita.br

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Departamento de Computação Científica

Divisão de Ciência da Computação

10 de dezembro de 2007

Roteiro

1. **Equações e Sistemas Não-lineares**
   - Introdução
   - Enumeração, Localização e Separação
     - Enumeração
   - Localização das Raízes
   - Separação de Raízes
   - Métodos Iterativos
     - Método da Bissecção
     - Método da Falsa Posição
     - Métodos de Ponto Fixo
     - Método de Newton-Raphson
   - Métodos de Múltiplos Passos

Roteiro

1. **Equações e Sistemas Não-lineares**
   - Introdução
   - Enumeração, Localização e Separação
     - Enumeração
   - Localização das Raízes
   - Separação de Raízes
   - Métodos Iterativos
     - Método da Bissecção
     - Método da Falsa Posição
     - Métodos de Ponto Fixo
     - Método de Newton-Raphson
   - Métodos de Múltiplos Passos

Introdução

Métodos iterativos para cálculos das raízes:

- Métodos de Quebra
- Métodos de Ponto Fixo
- Métodos de Múltiplos Passos

A raiz de uma equação é calculada iterativamente usando uma fórmula de recorrência:

$$x = \lim_{x \longrightarrow \infty} x_i$$

Roteiro

Enumeração das raízes

Seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$

Definição

Enumerar as raízes de um polinômio $p(x)$ é dizermos quantas raízes possui o polinômio e de que tipos são.

Nota: Por simplificação do texto, quando usarmos a função $p(x)$ queremos na verdade dizer a equação $p(x) = 0$.

Regra de Descartes

O número de raízes positivas de uma equação polinomial $p(x) = 0$; com coeficientes reais, nunca é maior que o número de trocas de sinal na seqüência de seus coeficientes não nulos, e se é menor, então é sempre por um número par.

A mesma regra pode ser aplicada para a enumeração das raízes reais e negativas de $p(x)$, calculando-se $p(-x)$, pois as raízes positivas de $p(-x)$ são as negativas de $p(x)$.

Regra de Descartes

Exemplo:

$$
\begin{array}{lccccccccl}
p(x) = & & x^3 & + & 2x^2 & - & 3x & - & 5 & \\
 & + & & + & & - & & - & & \text{(1 troca de sinal)}
\end{array}
$$

Tem uma raiz positiva.

$$
\begin{array}{lccccccccl}
p(-x) = & - & x^3 & + & 2x^2 & + & 3x & - & 5 & \\
 & - & & + & & + & & - & & \text{(2 trocas de sinal)}
\end{array}
$$

Pode ter duas ou zero raízes reais negativas.

Regra de Descartes

$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

Se $p(x)$ tiver duas raízes negativas, então não terá nenhuma complexa. Se não tiver raízes negativas, então terá duas complexas.

Raízes		
Positiva	Negativa	Complexa
1	2	0
1	0	2

Regra de Descartes

Exemplo:

$$p(x) = \quad x^4 \quad - \quad x^3 \quad + \quad x^2 \quad - \quad x \quad + \quad 1$$

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$$ (4 trocas de sinal)

Pode ter 4, 2, 0 raízes positivas.

$$p(-x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Não tem troca de sinais, portanto não tem raízes negativas.

Regra de Descartes

$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

Logo, $p(x)$ pode ter:

Raízes		
Positiva	Negativa	Complexa
4	0	0
2	0	2
0	0	4

Regra de Haut

Dada a equação polinomial $p(x) = 0$ de grau n se para algum k, $1 \leq k < n$ tivermos $a_k^2 \leq a_{k+1}.a_{k-1}$, então $p(x)$ terá raízes complexas.

Regra da Lacuna

a) Se os coeficientes de $p(x)$ forem todos reais e para algum k, $1 \leq k < n$ tivermos $a_k = 0$ e $a_{k-1}.a_{k+1} > 0$, então $p(x)$ terá raízes complexas.

b) Se os coeficientes forem todos reais e existirem dois ou mais coeficientes nulos sucessivos, então $p(x)$ terá raízes complexas.

Exemplo

$p(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 3$

- Descartes: seja T o número de trocas de sinal: $T = 2$; daí $p(x) = 0$ tem 2 ou 0 raízes reais positivas

$P(-x) = -2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + 3$

$T = 3$; então $p(x) = 0$ tem 3 ou 1 raiz real negativa

- Haut: $a_2^2 < a_3.a_1$, ou seja $1 < 3.2$. Logo $p(x)$ tem raízes complexas

Reais Positivas	Reais Negativas	Complexas
2	1	2
0	3	2
0	1	4

Exemplo

$p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1$

$T = 4$, logo $p(x)$, tem 4, 2, 0 raízes positivas. $p(-x) = 0$ temos $T = 0$, ou seja $p(x)$ não tem raízes reais negativas.

- Lacuna: $a_2 = 0$ e $a_1.a_3 > 0$. Logo $p(x)$ tem raízes complexas.

Reais Positivas	Reais Negativas	Complexas
4	0	2
2	0	4
0	0	6

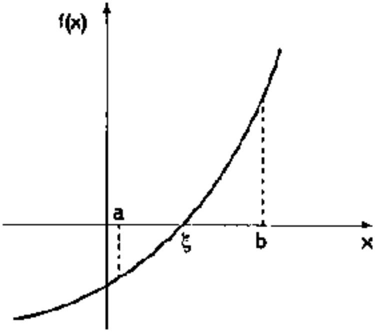
Dessa forma, para a enumeração de raízes complexas, temos as regras de Haut e Lacuna.

Roteiro

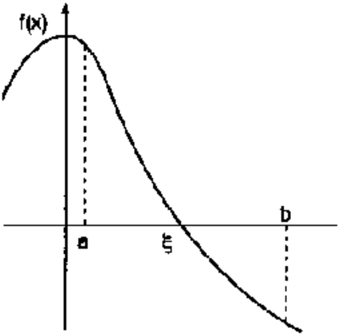
Localização das Raízes

Definição

Localizar as raízes de $p(x) = 0$ *é determinar um intervalo que contenha todas as raízes reais de* $p(x) = 0$. *Localizar as raízes complexas é determinar os raios interno e externo do anel que contenha as raízes complexas de* $p(x) = 0$.



$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$



$f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

Determinar a e b (cota interior, cota superior) tal que (a,b) contenha as raízes.

Teorema de Laguerre

Teorema

Dado o polinômio $p(x)$ *de coeficientes reais e dado um número* α, *obtemos* $p(x) = q(x).(x - \alpha) + R$. *Se os coeficientes de* $q(x)$ *e* R *forem todos positivos ou nulos, então teremos que para todas as raízes reais positivas* x_i *verificamos* $x_i < \alpha$.

Cota de Laguerre - Thibault

Dado $p(x) = 0$ de coeficientes reais, faça a deflação de $p(x)$ por $(x-1), (x-2), \ldots, (x-m)$ onde $q(x)$ tenha todos os coeficientes positivos ou nulos, assim $R(x) > 0$; tal m é chamado de **cota superior das raízes reais** de $p(x) = 0$. Para determinar a conta inferior basta fazer o mesmo procedimento para $p(-x)$ e daí determinar a cota inferior.

Exemplo

$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$

Localizar as raízes positivas de $p(x) = 0$.

Coef	1	1	-9	-1	20	-12
1		1	2	-7	-8	12
	1	2	-7	-8	12	0

Coef	1	1	-9	-1	20	-12
2		2	+6	-6	-14	12
	1	3	-3	-7	6	0

Coef	1	1	-9	-1	20	-12
3		3	12	9	24	132
	1	4	3	8	44	120

Logo, temos que todas as raízes positivas de $p(x) = 0$ estão entre 0 e 3 (inclusive?).

$p(-x) = -x^5 + x^4 + 9x^3 - x^2 - 20x - 12$

Multiplica-se $p(-x)$ por -1 e faz-se a deflação por $1, 2 \ldots$

Pode-se verificar que $m = 4$ (exercício)

Então as raízes reais $p(x) = 0$ estão em $[-4, 3]$

Cota de Vene

Teorema

Para toda raiz positiva α *de* $p(x) = 0$*, verifica-se a seguinte relação:*

$$0 < \alpha < 1 + \frac{M}{a_0 + a_1 + \ldots + a_p}$$

onde:

- M *é o valor absoluto do menor dos coeficientes negativos.*
- a_p *é o último coeficiente positivo antes do primeiro coeficiente negativo.*

Exemplo

$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$

$M = |-12| = 12$

$a_p = a_1 = 1$ (coeficiente de x^4)

Logo $0 \leq \alpha \leq 1 + \frac{|-12|}{1+1} = 1 + \frac{12}{2} = 7$

Para raízes negativas, temos:

$p(-x) = -x^5 + x^4 + 9x^3 - x^2 - 20x - 12$

$-p(-x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + x^2 + 20x + 12$

$M = 9$, $a_p = a_0 = 1$, Cota de Vene é $1 + 9 = 10$

Logo, as raízes reais estão em $[-10, 7]$

Cota de Kojima

Dado o polinômio

$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$, para toda raiz α real ou complexa verifica-se que ela se encontra em um anel de raio externo R e raio interno r.

$R = q_1 + q_2$

q_1 e q_2 são os maiores valores de $\left(\left|\frac{a_i}{a_0}\right|^{1/i}\right)$, $i = 1, \ldots, n$

$r = \frac{1}{s_1+s_2}$

s_1 e s_2 são os maiores valores da sequência $p(1/x)$

Exemplo

$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$

$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = -9, a_3 = -1, a_4 = 20, a_5 = -12$

$1^{1/1}, 9^{1/2}, 1^{1/3}, 20^{1/4}, 12^{1/5}$

$1, 3, 1, 2.1147, 1.6437$

$q_1 = 3$ e $q_2 = 2.1147$

$R = 5.11472527$ (Raio Externo)

$p(1/x) : -12x^5 + 20x^4 - x^3 - 9x^2 + x + 1$

$s_1 = 1.666$ $s_2 = 0.9085$ $s_1 + s_2 = 2.5752$

$r = 0.3883$ (Raio Interno)

Roteiro

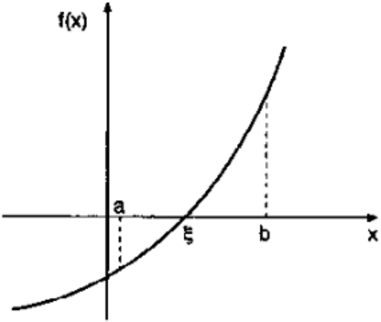
Separação de Raízes

É o processo de encontrar uma seqüência de subintervalos distintos, tais que cada subintervalo contenha exatamente uma raiz real e cada raiz real esteja contida num subintervalo.

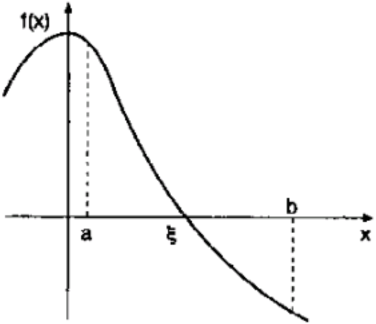
Teorema de Bolzano

Teorema

Se f for uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e f trocar de sinal nos extremos desses intervalos, então existe pelo menos uma raiz de f no intervalo $[a, b]$.



$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$



$f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

Teorema de Budan

Teorema

Seja o intervalo (a, b)*. Seja* $p^{(k)}(a)$ *o valor da derivada de ordem* k *de* $p(x)$ *calculada para* $x = a$*. Seja* V_a *o número de variações de sinal da seqüência:* $p(a), p'(a), p''(a), \ldots, p^{(n+1)}(a)$ *tomados nesta ordem. Seja* V_b *o número de variações de sinal da seqüência* $p(b), p'(b), p''(b), \ldots, p^{(n+1)(b)}$*. Então o número de raízes de* $p(x) = 0$ *no intervalo* (a, b) *é igual ou menor que* $|V_a - V_b|$ *por múltiplo de 2.*

Exemplo

$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

- Descartes: 2 raízes ou não tem raízes positivas + 1 raiz negativa

Fazendo

$p'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$p''(x) = 6x - 4$

$p'''(x) = 6$

Cota superior = 3

Seja $(a, b) = (0, 3)$

$p(0) = 2 \quad p'(0) = -1 \quad p''(0) = -4 \quad p'''(0) = 6$

$p(3) = 8 \quad p'(3) = 10 \quad p''(3) = 14 \quad p'''(3) = 6$

$V_0 = 2 \; V_3 = 0$

Então podemos ter duas ou nenhuma raiz em $(0, 3)$.

Dividindo o intervalo $[0, 3]$ em dois subintervalos temos: $(0, 1.5)$ e $(1.5, 3)$

Calculando V em $x = 1.5$ obtém-se $V_{1.5} = 1$

Então necessariamente temos uma raiz em cada subintervalo: $(0, 1.5)$ e $(1.5, 3)$

Exemplo

$p(x) = x^3 - 9x^2 + 20x + 1$

1. Enumeração: Para $p(x)$ temos $T = 2$ e $p(-x)$ temos $t = 1$ (exercício). Temos uma raiz negativa (com certeza) e duas raízes positivas ou nenhuma.
2. Localização: cota de Laguerre-Thibault: $CS = 9$ $CI = -1$

4 Método gráfico para $p(x) = x^3 - 9x^2 + 20x + 1$

x	p(x)	x	p(x)
-1	-29	5	1
0	1	6	13
1	13	7	43
2	13	8	165
3	7	9	181
4	1		

$p(4.5) = -0.125$ temos uma raiz entre $[4.0, 4.5]$ e a outra entre $[4.5, 5.0]$.

É preciso ter cuidado com o método gráfico, pois ele pode ser enganoso.

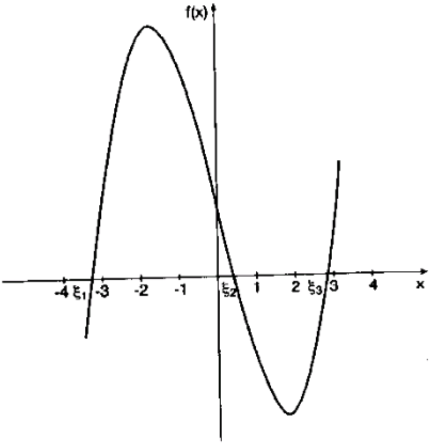
Análise gráfica

A análise gráfica da função $f(x)$ é fundamental para se obter boas aproximações para a raiz. Para tanto, temos duas formas:

- Esboçar o gráfico da função $f(x)$ e localizar as abcissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo.
- A partir da equação $f(x) = 0$, obter a equação equivalente $g(x) = h(x)$, esboçar os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$ no mesmo eixo cartesiano e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam, pois neste caso $f(\xi) = 0 \leftrightarrow g(\xi) = h(\xi)$.

Exemplo da primeira forma

$f(x) = x^3 - 9x + 3$



$f(x) = x^3 - 9x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

x	f(x)
4	–25
-3	3
$-\sqrt{3}$	13.3923
–1	11
0	3
1	–5
$\sqrt{3}$	–7.3923
2	–7
3	3

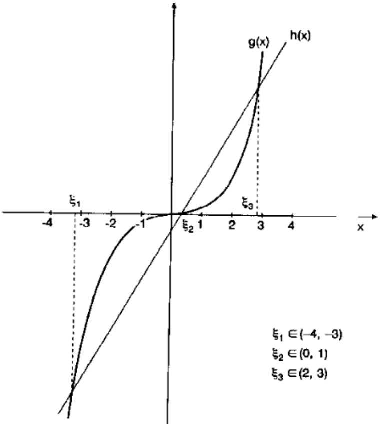
$\xi_1 \in (-4, -3)$

$\xi_2 \in (0, 1)$

$\xi_3 \in (2, 3)$

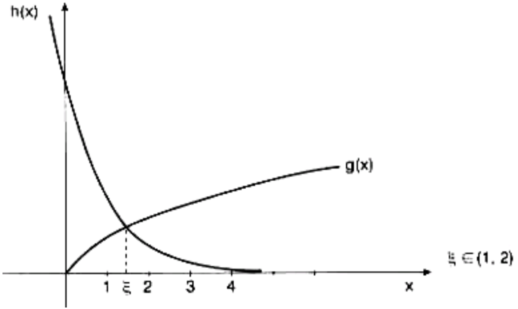
Exemplo segunda forma

$x^3 - 9x + 3 = 0 \rightarrow x^3 = 9x - 3$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x - 3$



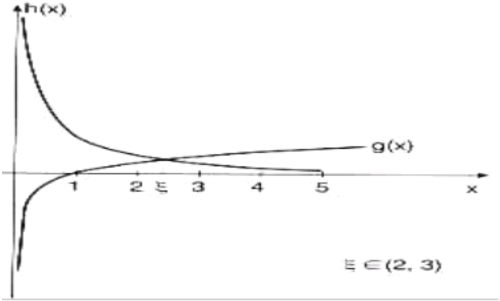
Exemplo

$f(x) = \sqrt{5} - 5e^{-x}$ $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 5e^{-x}$



Exemplo

$f(x) = x\log(x) - 1$ $g(x) = \log(x)$ e $h(x) = 1/x$



Roteiro

Métodos Iterativos

1. Estimativa inicial
2. Atualização (uma fórmula que atualiza a solução aproximada)
3. Critério da parada
4. Estimulador de exatidão

Critérios de Parada

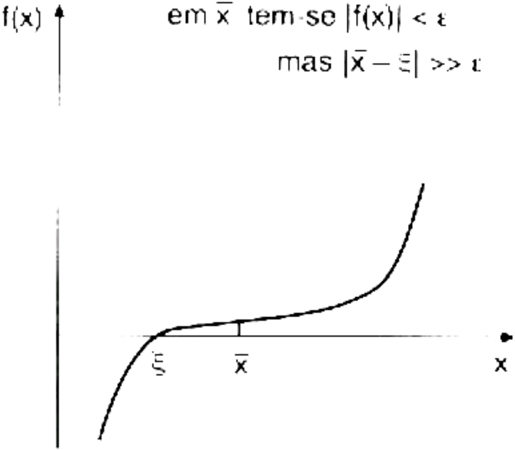
- $\frac{|x_i - x_{i-1}|}{x_i} < \epsilon_1$
- $|f(x_i)| < \epsilon_2$
- $\text{DIGSE}(x_i, x_{i-1}) \geq k$
- número de iterações $> L$

Seja x é raiz aproximada com precisão ϵ se:

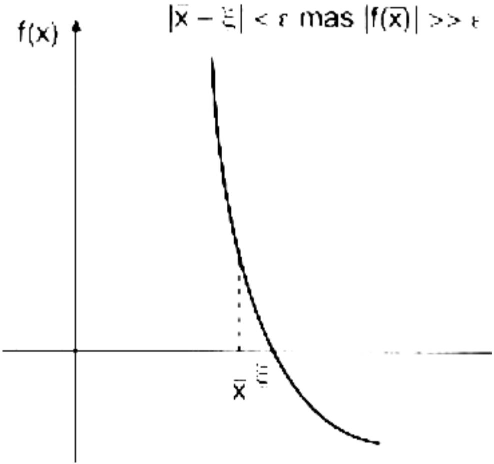
i) $|x - \xi| < \epsilon$

ii) $|f(x)| < \epsilon$

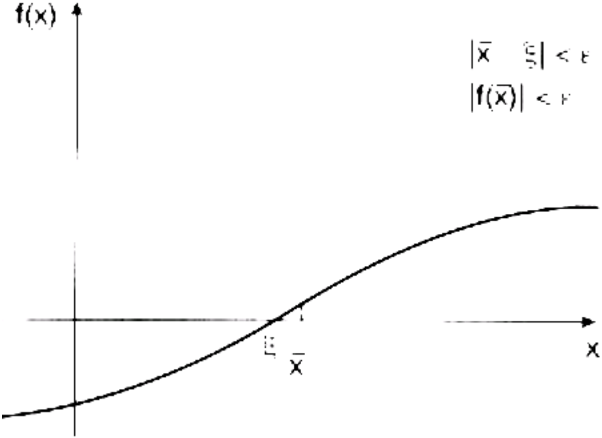
Nem sempre é possível ter ambas as condições satisfeitas simultaneamente.



$|f(x)| < \epsilon$ mas $|x - \xi| >> \epsilon$



$|x - \xi| < \epsilon$ mas $|f(x)| >> \epsilon$



$|f(x)| < \epsilon$ e $|x - \xi| < \epsilon$

Método da Bissecção

Seja $[a,b]$ um intervalo que contenha uma raiz de $f(x)=0$ e $f(a).f(b)<0$ ou seja $f(x)$ corta o eixo dos x num ponto em $[a,b]$.

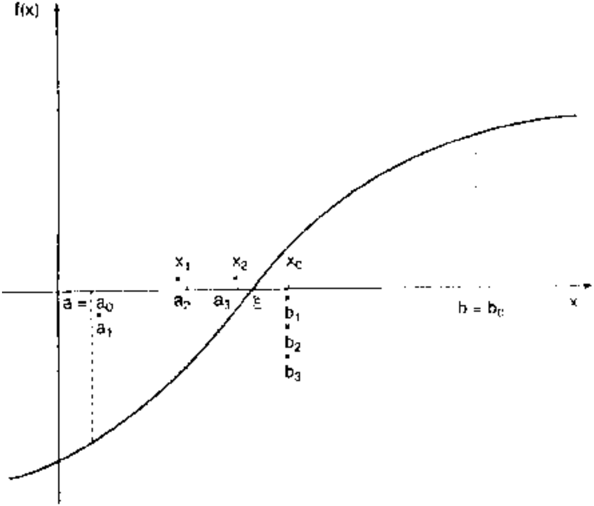
1. Calcula-se $f(x)$ no ponto médio de $[a,b]$

   $x_m = \frac{a+b}{2}$

2. Se $f(x_m)\neq 0$ e $f(a).f(x_m)<0$ ou $f(x_m).f(b)<0$ escolha seu novo intervalo de modo que f tenha sinais opostos na extremidade.

3. Repete-se o processo, voltando para o passo 1 até que tenhamos chegando “suficientemente perto da raiz” ou seja ter um critério de parada satisfeito.

Método da Bissecção



Método da Bissecção

Algoritmo

Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a).f(b) < 0$

1. Dados iniciais:
   - intervalo incial $[a, b]$
   - precisão ϵ
2. Se $(a - b) < \epsilon$, então escolha para qualquer $x^* \in [a, b]$ e pare.
3. $k = 1$
4. $x_m = \frac{a+b}{2}$
5. Se $f(a).f(x_m) > 0$ faça $a = x_m$. Vá para o passo 7.

Método da Bissecção

Algoritmo

6. $b = x_m$
7. Se $(b - a) \leq \epsilon$, escolha para qualquer $x^* \in [a, b]$ e pare.
8. $k = k + 1$ volte para o passo 4

Terminando o processo, teremos um intervalo $[a, b]$ que contém a raiz (e tal que $(b - a) < \epsilon$) e uma aproximação x^* para a raiz exata.

Método da Bissecção

Exemplo

$p(x) = x^3 - 5x^2 + 17x + 21$

- Enumeração: 2 ou 0 raízes positivas, 1 raiz negativa
- Localização: cota de Laguerre-Thibault
  - $CS = 5$
  - $CI = -1$
- Separação:

x	f(x)	x	f(x)
-1	-2	2	43
0	21	3	54
1	34	4	73

Logo só há uma raiz negativa em $[-1,0]$

k	a	b	x_m	$f(x_m)$
1	-1,0	0,0	-0,5	11,15
2	-1,0	-0,5	-0,75	5,0156
3	-1,0	-0,75	-0,875	1,6269
4	-1,0	-0,875	-0,9375	-0,1560
5	-0,9375	-0,875	-0,90625	0,743011
6	-0,9375	-0,90625	-0,921875	0,296398
7	-0,9375	-0,921875	-0,929687	0,070171
$\vdots$				

Método da Bissecção

Estimativa do Número de Iterações

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

deve-se obter o valor k tal que $b_k - a_k < epsilon$

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \epsilon$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \epsilon}{\log 2}$$

Se k satisfaz a relação acima, ao final da iteração k teremos o intervalo $[a, b]$

que contém a raiz ξ tal que:

$$\forall x \in [a, b] \rightarrow |x - \xi| \leq b - a < \epsilon$$

Método da Bissecção

Exemplo

$f(x) : x \log x - 1$ com intervalo inicial $[2, 3]$ e $\epsilon = 10^{-2}$

$$
\begin{aligned}
k &> \frac{\log(3-2) - \log(10^{-2})}{\log 2} = \frac{\log 1 + 2 \log 10}{\log 2} \\
k &> \frac{2}{0.3010} \cong 6.64 \\
k &= 7
\end{aligned}
$$

Método da Bissecção

Observações

- Convergência é muito **lenta**, pois se o intervalo inicial é tal que $b_0 - a_0 >> \epsilon$ e se ϵ for 'muito pequeno' o número de iterações tende a ser muito grande.

  Exemplo:

  $b_0 - a_0 = 3, \epsilon = 10^{-7}$

  $k \geq 24.8 \; k = 25$

- DIGSE ganho a cada iteração:

  $DIGSE(x_{i+1}x_i) = DIGSE(x_ix_{i+1}) + \log 2 \cong DIGSE(x_ix_{i-1}) + 0.33$

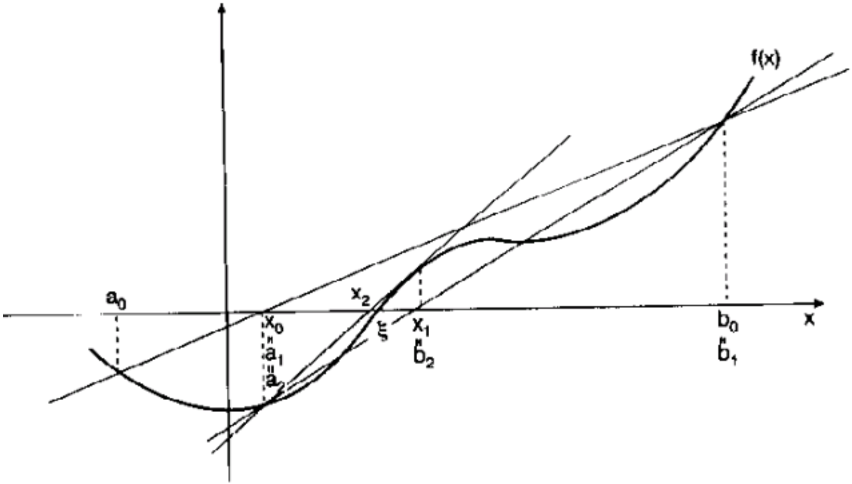
Método da Falsa Posição

- Condição necessária $[a, b] : f(a).f(b) < 0$
- É semelhante ao método da bissecção, mas calcula-se a quebra usando:

$$x = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)}$$

x é o ponto de intersecção entre o eixo e a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Método da Falsa Posição



Método da Falsa Posição

Exemplo

$$x \log x - 1 \text{ em } [a_0, b_0] = [2, 3]$$

$$f(a_0) = -0,3979 < 0$$

$$f(b_0) = 0,4314 > 0$$

$$x_0 = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x_0 = \frac{2.0,4314 - 3.(-0,3979)}{0.4314 - (-0.3979)} = 2.4798$$

$$f(x_0) = -0.0219 < 0$$

Método da Falsa Posição

Exemplo

Como $f(a_0)$ e $f(x_0)$ tem o mesmo sinal

$a_1 = x_0 = 2.4789, f(a_1) < 0$

$b_1 = 3, f(b) > 0$

$$x_1 = \frac{2.4789 \times 0.4314 - 3x(-0.0219)}{0.4214 - (-0.0219)} = 0.2509$$

$f(x_1) = -0.001$

Analogamente $a_2 = x_2 = 2.5049$

$b_2 = 3$

Método da Falsa Posição

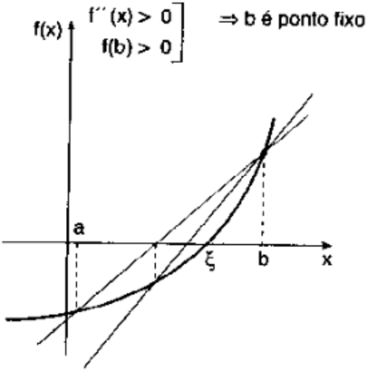
Convergência

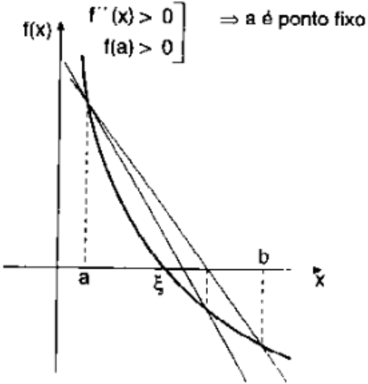
"Se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ com $f(a).f(b) < 0$ então o método da falsa posição converge"

Método da Falsa Posição

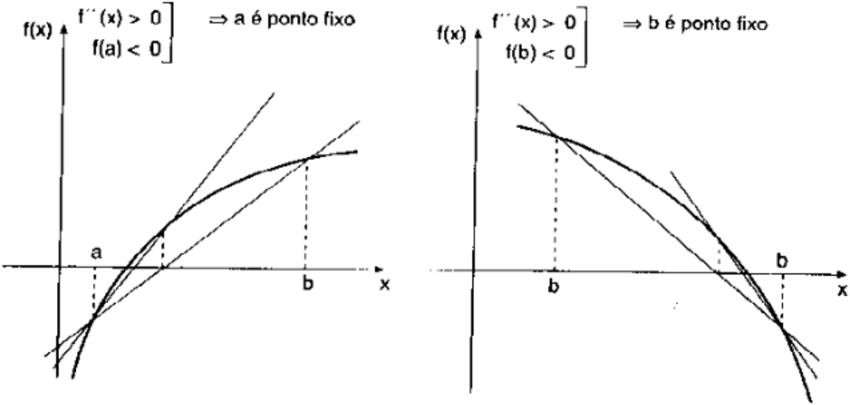
Pode ocorrer problemas de ponto fixo (o intervalo nunca fica suficientemente pequeno) como mostrado nas figuras.

Método da Falsa Posição





Método da Falsa Posição



Métodos de Ponto Fixo

- Métodos da Iteração Linear
- Método de Newton-Raphson

Métodos de Ponto Fixo

Seja o problema de determinar os valores de x tal que a $f(x) = 0$, onde $f(x)$ uma função não linear em $[a, b]$

Vamos construir uma $g(x)$ tal que:

- $g(x) = x + c(x).f(x)$
- $c(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$

Métodos de Ponto Fixo

Para achar a solução x^* tal que $f(x^*) = 0$ corresponde em

$g(x) = x + c(x).f(x)$ achar $x^* = g(x^*)$.

Partimos de uma solução inicial x_0 e determinamos outros x_i de acordo com a função iterativa $x_{i+1} = g(x_i)$

Métodos de Ponto Fixo

Teorema

Seja $I : [a,b]$ e seja g uma função satisfazendo:

- g *é contínua em* I
- $g(I) \subseteq I$

Então existe pelo menos um $x^* \in I$ tal que $g(x^*) = x$, isto é g tem pelo menos um ponto fixo em I.

Métodos de Ponto Fixo

Teorema de Convergência

Teorema

Seja x^* *uma raiz de equação* $f(x) = 0$*, isolada num intervalo* I *e seja* $g(x)$ *uma função de iteração para a equação* $f(x) = 0$*. Se:*

i $g(x)$ *e* $g'(x)$ *são contínuas em* I

ii $g'(x) \leq M < 1, \forall x \in I$ *e*

iii $x_0 \in I$

então a seqüência x_k *gerada pelo processo iterativo* $x_{k+1} = g(x_k)$ *converge para* $x^*.(g(x^*) = x^*)$

Método da Iteração Linear (MIL)

Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$, intervalo que contém raiz em $f(x) = 0$.

O MIL consiste em transformar esta equação em uma equação equivalente $x = g(x)$ e a partir de uma aproximação inicial x_0 gerar a seqüência x_k tal que:

$$x_{k+1} = g(x_k) \text{ (função de iteração)}$$

Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo

$x^2 + x - 6 = 0$

$g_1(x) = 6 - x^2$

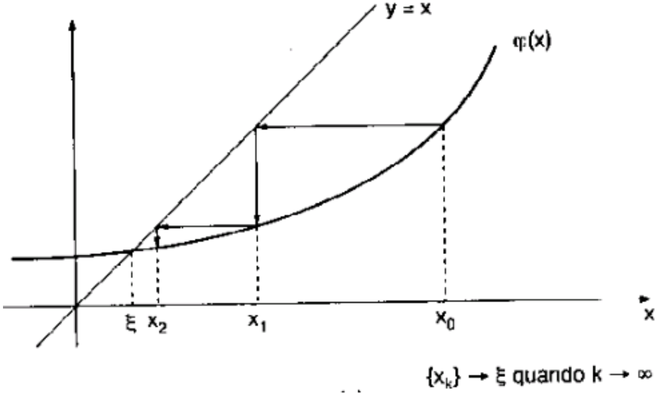
$g_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$

$g_3(x) = \frac{6}{x-1}$

$g_4(x) = \frac{6}{x+1}$

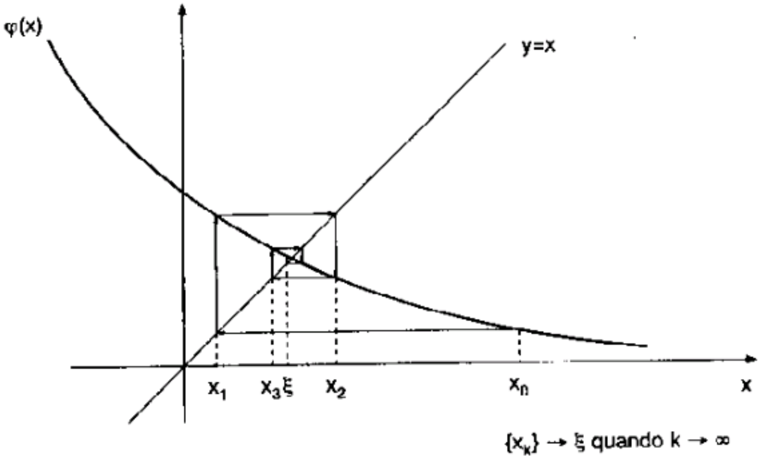
Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo



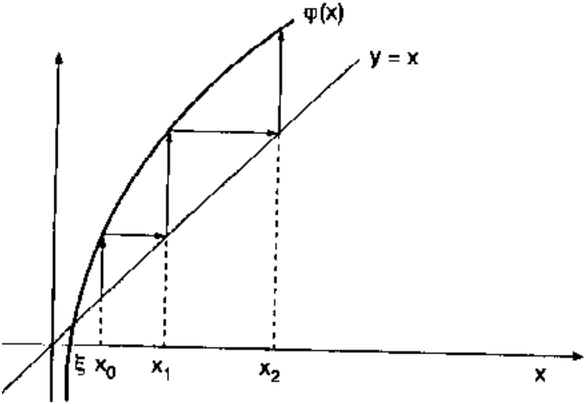
Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo



Método da Iteração Linear (MIL)

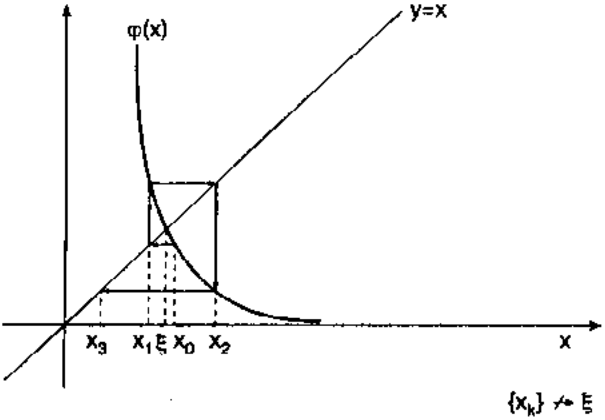
Exemplo



$\{x_k\} \not\to \xi$

Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo



Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo

$x^2 + x - 6 = 0$ $(x_1^* = -3)$ e $(x_2^* = 2)$

$g_1(x) = 6 - x^2, x_0 = 1.5$

$x_1 = g(x_0) = 6 - 1,5^2 = 3.75$

$x_2 = g(x_1) = 6 - (3.75)^2 = -8.0625$

$x_3 = g(x_2) = 6 - (-8.0625)^2 = -59,003906$

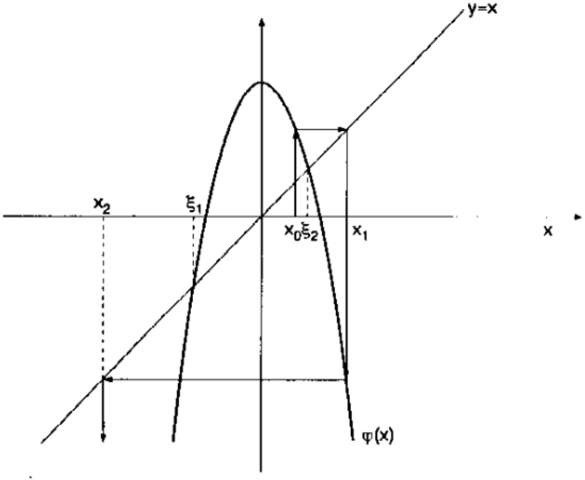
$x_4 = g(x_3) = 6 - (-59,003906)^2 = -3475.4609$

$\vdots$

Pode-se ver que x_k não está convergindo para $x_2^* = 2$

Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo



Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo

Seja agora $x_2^* = 2$, $g_2(x) = \sqrt{6 - x}\, x_0 = 1.5$

$x_1 = g(x_0) = \sqrt{6 - 1.5} = 2.12132$

$x_2 = g(x_1) = \sqrt{6 - 2.12} = 1.9644$

$x_3 = g(x_2) = 2.00783$

$x_4 = g(x_3) = 1.99809$

$x_5 = g(x_4) = 2.0048$

Podemos ver que x_k está convergindo para $x_2^* = 2$

Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo

Vamos analisar o que aconteceu usando o teorema de convergência.

$f(x) = x^2 + x - 6 = 0$ (tem raízes 2 e 3)

Para $g_1(x) = 6 - x^2 \rightarrow g'(x) = -2x$

$|g'(x)| < 1 \leftrightarrow |2x| < 1$

Então $-1/2 < x < 1/2$

Não existe um intervalo I centrado em $x^* = 2$ tal que $|g'(x)| < 1$. Portanto $g(x)$ **não** satisfaz o teorema anterior.

Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo

Vamos analisar $g_2(x) = \sqrt{6-x} \rightarrow g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6-x}}$

$$|g_2'(x)| < 1 \leftrightarrow \left|\frac{1}{2\sqrt{6-x}}\right| < 1 \leftrightarrow x < 5.75$$

É possível de obter um intervalo I centrado em $x^* = 2$ tal que as condições do teorema anterior sejam satisfeitas.

Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo

$f(x) = x^2 - x - 2$ raízes 2 e -1

- $g_1(x) = x^2 - 2$
- $g_2(x) = x = \sqrt{2+x}$

No primeiro caso, $g_1'(x) = 2.x > 1$ para $x > 1/2$ logo $g_1(x)$ não satisfaz o teorema anterior.

No segundo caso, $g_2'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} < 1$ para $x > 0$, logo $g_2(x)$ satisfaz o teorema.

Método da Iteração Linear (MIL)

Exemplo

Seja $x_0 = 0$ e $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}$

$x_1 = \sqrt{2 + 0} = 1.4142\ldots$

$x_2 = \sqrt{x_1 + 2} = 1.8477\ldots$

$x_3 = \sqrt{x_2 + 2} = 1.9615\ldots$

$x_4 = \sqrt{x_3 + 2} = 1.98036$

$x_5 = \sqrt{x_4 + 2} = 1.9975\ldots$

$x_6 = \sqrt{x_5 + 2} = 1.99939\ldots$

Há convergência para $x^* = 2 (f(x) = 0)$

Método de Newton-Raphson (NR)

- Um dos mais clássicos para cálculo de zeros de funções.
- Uma das condições de convergência é que $|g'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ onde I é um intervalo centrado na raiz. Pode-se observar que a convergência do método será mais rápida quanto menor for $|g'(x)|$.
- O método de NR se baseia em garantir esta convergência e acelerar a convergência. Consiste em escolher para função de iteração a função $g(x)$ tal que $g'(x) = 0$.

Método de Newton-Raphson (NR)

Então dada que $f(x) = 0$ e partindo na forma geral para $g(x)$, queremos obter a função $c(x)$ tal que $g'(x) = 0$.

$g(x) = x + c(x).f(x)$

$g'(x^*) = 1 + c'(x).f(x) + c(x).f'(x)$

$g'(x^*) = 1 + c'(x^*).f(x^*) + c(x^*).f'(x^*)$

$g'(x^*) = 1 + c(x^*).f'(x^*)$

Assim $g'(x^*) = 0 \leftrightarrow 1 + c(x^*).f'(x^*) = 0 \rightarrow c(x^*) = \dfrac{-1}{f'(x^*)}$

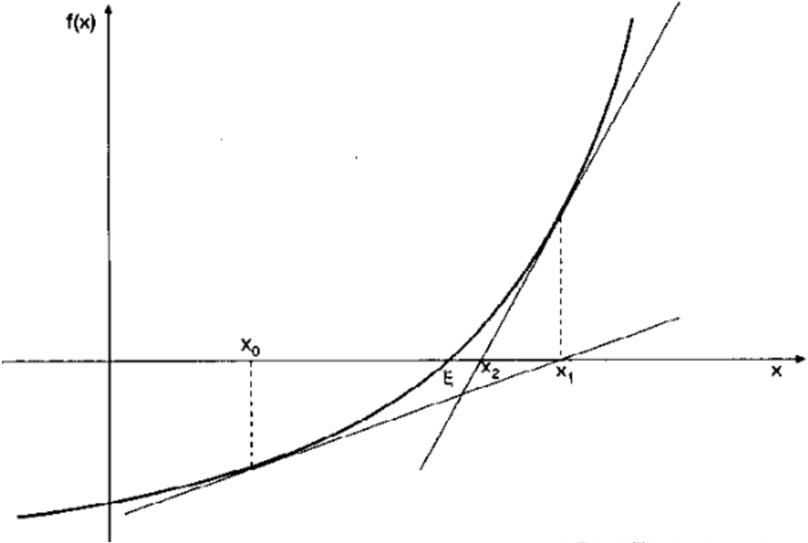
de onde tomamos $c(x) = -1/f'(x)$

Método de Newton-Raphson(NR)

Então dada $f(x)$, a função de iteração, $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $g'(x^*) = 0$. E daí, fazendo a iteração, temos:

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \ldots$

Método de Newton-Raphson(NR)



Método de Newton-Raphson(NR)

Exemplo

Seja $p(x) = x^3 - 5x^2 + 17x + 21 \rightarrow p'(x) = 3x^2 - 10x + 17$. Tomando

$x_0 = -1.0$: $x_0 = -1.0$

$$x_1 = -1.0 - \frac{p(1)}{p'(1)} = -1.0 - \frac{-2}{30}$$

$x_1 = -0.9333333333$

$x_2 = -0.9321152567$

$x_3 = -0.9321148567$

$x_4 = -0.9321148567$

Método de Newton-Raphson(NR)

Convergência

Teorema

Sejam $f(x)$, $f'(x)$ *e* $f''(x)$ *contínuas num intervalo* I *que contém a raiz* $x = x^*$ *de* $f(x) = 0$. *Supor que* $f'(x^*) \neq 0$.

Então, existe um intervalo $I^* \subset I$, *contendo a raiz* x^*, *tal que se* $x_0 \in I$, *a seqüência* x_k *gerada pela fórmula recursiva:*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

convergirá para a raiz x^*.

Ordem de Convergência

Inicialmente supomos que um método gera uma seqüência $\{x_k\}$ que converge para x^*, onde $e_k = x_k - x^* \cong$ erro na iteração k.

Se existir um número $p \geq 1$ e uma constante $c > 0$ tal que:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$$

então p é chamada de ordem de convergência da seqüência x_k e c é constante de erro.

Ordem de Convergência

- Se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c, 0 \le c < 1$$

então a convergência é pelo menos linear. Nesse caso, $p = 1$.

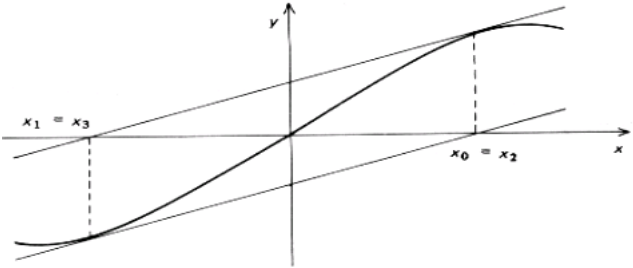
- Se p é igual a 2 ou 3 então a convergência é dita quadrática ou cúbica.
- Se existirem dois métodos com p_1 e p_2 e $p_1 > p_2$ então o método com p_1 converge mais rápido.
- A escolha de valor inicial pode levar NR a divergir ou convergir.

Problemas no Método de Newton-Raphson

- Iterações podem levar a um loop infinito;
- O método de Newton Raphson não é aconselhável para funções cuja derivada é complicada ou sujeita a erros (a cada iteração)

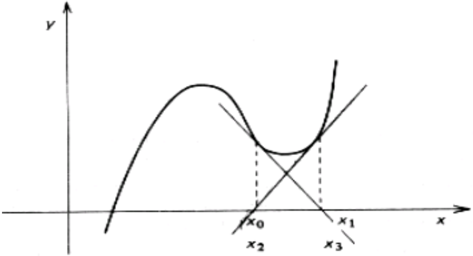
Método de Newton-Raphson(NR)

Problemas



Método de Newton-Raphson(NR)

Problemas



Roteiro

Métodos de Múltiplos Passos

- Método da Secante
- Método de Muller

Método da Secante

Seja a reta $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$. A intersecção dessa reta com o eixo do x determina a próxima iteração x_2. Com a reta $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ determinamos x_3. Continuamos com o processo até satisfazer o critério de parada.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{(f(x_k) - f(x_{k-1}))}$$

podemos reescrever:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Método da Secante

Observe que a função de iteração é similar com a de NR.

$$f'(x) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Devemos partir de x_0 e x_1 (dois passos).

Método da Secante

Exemplo

$f(x) = x^2 + x - 6$, $(x^* = 2)$, $x_0 = 1.5$ e $x_1 = 1.7$

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1.7 - \frac{(1.7 - 1.5)(-1.41)}{-1.41 + 2.25}$$

$$x_2 = 2.03571$$

$$x_3 = 1.99774$$

$$x_4 = 1.99999$$

$$\vdots$$

Método da Secante

Convergência

O método da secante é uma aproximação para o método NR, as condições para a convergência do método são praticamente as mesmas, acrescente-se ainda que o método pode divergir se $f(x_k) \cong f(x_{k+1})$

Método de Muller

O método da secante interpola a função $f(x)$ através de um polinômio de grau 1. Já o método de Muller aproxima a função e interpola a função por um polinômio de grau 2. São necessários 3 pontos a cada iteração. Inicialmente temos:

$(x_0, p(x_0))$, $(x_1, p(x_1))$ e $(x_2, p(x_2))$

Com esses pontos obtemos a função quadrática interpoladora e verificamos onde ela encontra o eixo x para obter o ponto x_3.

Comparação dos Métodos

- Garantia de convergência
- Rapidez da convergência
- Esforço computacional

Convergência

- Bissecção, Falsa Posição: convergência garantida desde que a função seja contínua no intervalo $[a, b]$, e $f(a).f(b) < 0$.
- MIL, NR, Secante: condições mais restritivas de convergência. Por outro lado eles têm convergência mais rápida.

Rapidez de Convergência

- Quanto menor a quantidade de iterações, menor é o tempo de execução.
- Para o MIL, pode-se mostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = c \text{ e } c < 1$$

ou seja a convergência é pelo menos linear. A prova está em Ruggiero.

- No NR, mostra-se que (Ruggiero):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \frac{1}{2}$$

ou seja, tem-se convergência quadrática pelo menos.

- No método da Secante, a ordem de convergência não é quadrática, mas também não é linear. Em Dahquiste Bjorck (74) mostra-se que $p = 1.618$.

Esforço Computacional

Medido através do número de operações efetuadas a cada iteração, da complexidade desta operação do número de decisões lógicas, do número de avaliações de funções a cada iteração e do número total de iterações.

Considerações Finais

- O método ideal para um problema é aquele que tem:
  - convergência assegurada
  - ordem de convergência p alta
  - cálculos em cada iteração simples
- Se for fácil de verificar a condição de convergência e o cálculo de $f'(x)$ não for muito elaborado, use NR.
- Se cálculo de $f'(x)$ muito complicado, use Secante.