3. Interpolação

3.1 Polinômios interpoladores.

3.2 Polinômios de Lagrange.

3.3 Polinômios de Newton.

3.4 Polinômios de Gregory-Newton.

3.5 Escolha dos pontos para interpolação.

3.6 Erro de truncamento da interp. polinomial.

3.7 Estudos de caso:

- Curva de titulação.
- Interpolação inversa.

3.8 Exercícios.

Polinômios interpoladores

- Seja a tabela

x	0,1	0,6	0,8
y	1,221	3,320	4,953

.

- Valor correspondente de y para um dado x.
- Obter função que relaciona as variáveis x e y.
- Polinômios são as funções mais utilizadas para determinar esta relação.
- Polinômio interpolador: construído para aproximar uma função.
- Fundamentais: integração numérica, cálculo de raízes de equações e solução de equações diferenciais ordinárias.

Interpolação linear

- Pontos base (x_0, y_0) e (x_1, y_1) de $y = f(x)$, com $x_0 \neq x_1$.
- Aproximação de $f(z)$, $z \in (x_0, x_1)$

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0 + a_1 x.$$

- $P_1(x)$: polinômio interpolador de grau 1.
- Polinômio interpolador passa pelos pontos base

$$\begin{matrix} P_1(x_0) = y_0 \\ P_1(x_1) = y_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

- Sistema triangular equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & x_1 - x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix}.$$

- Solução do sistema linear

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ e } a_0 = y_0 - a_1 x_0.$$

Polinômio interpolador

- Polinômio interpolador de grau 1

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x = (y_0 - a_1 x_0) + a_1 x,$$

$$P_1(x) = y_0 + a_1(x - x_0),$$

$$\boxed{P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}.$$

- $\det(X) = x_1 - x_0 \neq 0$: solução única.
- Por 2 pontos passa um único polinômio de grau 1.
- Verifica-se

$$P_1(x_0) = y_0 \text{ e}$$

$$P_1(x_1) = y_1.$$

Exemplo

- Calcular $P_1(0{,}2)$ e $P_1(0{,}3)$ a partir da tabela

i	0	1
x_i	0,1	0,6
y_i	1,221	3,320

.

- Polinômio interpolador de grau 1

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

$$P_1(0{,}2) = 1{,}221 + \frac{3{,}320 - 1{,}221}{0{,}6 - 0{,}1}(0{,}2 - 0{,}1) \rightsquigarrow$$

$P_1(0{,}2) = 1{,}641$ e

$$P_1(0{,}3) = 1{,}221 + \frac{3{,}320 - 1{,}221}{0{,}6 - 0{,}1}(0{,}3 - 0{,}1) \rightsquigarrow$$

$P_1(0{,}3) = 2{,}061.$

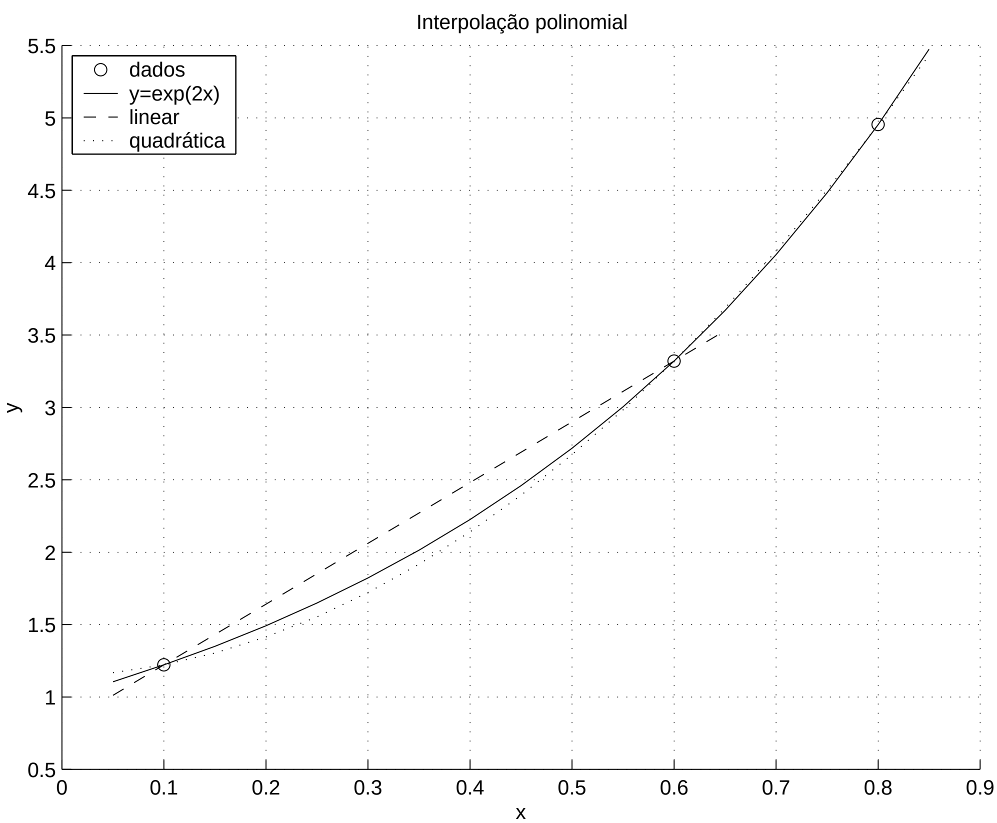
- Sendo $f(x) = e^{2x}$, os erros cometidos são

em $x = 0{,}2$ tem-se $1{,}641 - e^{2 \cdot 0{,}2} = 0{,}149$ e

em $x = 0{,}3$ tem-se $2{,}061 - e^{2 \cdot 0{,}3} = 0{,}239.$

Geometria da interpolação polinomial

- o: pontos base
- --: polinômio interpolador de grau 1.
- · ·: polinômio interpolador de grau 2.
- —: função $f(x) = e^{2x}$.



Interpolação quadrática

- Pontos base (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de uma função $y = f(x)$, com x_i distintos.

- Aproximação de $f(z)$, $z \in (x_0, x_2)$

  $$f(x) \approx P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

- $P_2(x)$: polinômio interpolador de grau 2.

- Polinômio interpolador passa pelos pontos base

$$\begin{cases} P_2(x_0) = y_0 \\ P_2(x_1) = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

- X: matriz de Vandermonde.

- $\det(X) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0) \neq 0 \longrightarrow$ solução única.

- Por 3 pontos: um único polinômio de grau 2.

- Por $n+1$ pontos: um único polinômio de grau n.

Exemplo

- Calcular $P_2(0{,}2)$ usando os dados da tabela

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

.

- Coeficientes do polinômio interpolador

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}01 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}36 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}221 \\ 3{,}320 \\ 4{,}953 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição LU com pivotação parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}714 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}63 \\ 0 & 0 & -0{,}1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $Lt = Py$: $t = [1{,}221 \;\; 3{,}732 \;\; -0{,}567]^T$.
- $Ua = t$: $a = [1{,}141 \;\; 0{,}231 \;\; 5{,}667]^T$.
- Polinômio interpolador de grau 2

$$P_2(x) = 1{,}141 + 0{,}231x + 5{,}667x^2 \leadsto P_2(0{,}2) = 1{,}414.$$

- Polinômio passa pelos pontos base

$$P_2(0{,}1) = 1{,}221;\ P_2(0{,}6) = 3{,}320;\ P_2(0{,}8) = 4{,}953.$$

Polinômios de Lagrange

- Sejam $n+1$ pontos base

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n).$$

- Abscissas x_i distintas.
- Valores $y_i = f(x_i)$ e $x \in (x_0, x_n)$.
- Construir um polinômio $L_n(x)$ de grau não superior a n

$$L_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Fórmula de Lagrange

- Polinômios de grau n, $P_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

  $P_i(x_i) \neq 0$ e $P_i(x_j) = 0$, $\forall\ i \neq j$.

- Assim

$$P_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n),$$

$$P_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n),$$

$$P_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n),$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),$$

$$P_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Fórmula de Lagrange cont.

- $L_n(x)$ é de grau não superior a n.
- $L_n(x)$ como combinação linear dos $P_i(x)$

$$L_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x),$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i P_i(x).$$

- Em cada x_i

$$L_n(x_i) = y_i = c_i P_i(x_i) \rightarrow c_i = \frac{y_i}{P_i(x_i)},$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{P_i(x_i)} P_i(x).$$

- Polinômio interpolador de Lagrange de grau n

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}.$$

Exemplo

- Calcular $L_1(0{,}2)$ a partir da tabela

i	0	1
x_i	0,1	0,6
y_i	1,221	3,320

.

- Para $n = 1$

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

$$L_1(0{,}2) = 1{,}221 \frac{0{,}2 - 0{,}6}{0{,}1 - 0{,}6} + 3{,}320 \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}6 - 0{,}1} \leadsto$$

$$L_1(0{,}2) = 1{,}641.$$

Polinômio via sistema linear e Lagrange

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), \\
&= \frac{y_0 x_1 - y_0 x_0 + y_1 x - y_1 x_0 - y_0 x + y_0 x_0}{x_1 - x_0}, \\
&= \frac{y_0(x_1 - x) + y_1(x - x_0)}{x_1 - x_0}, \\
&= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \leadsto \\
P_1(x) &= L_1(x).
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Calcular $L_2(0{,}2)$, usando os dados da tabela

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

.

- Para $n = 2$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

$$L_2(0{,}2) = 1{,}221 \frac{(0{,}2-0{,}6)(0{,}2-0{,}8)}{(0{,}1-0{,}6)(0{,}1-0{,}8)} + 3{,}320 \frac{(0{,}2-0{,}1)(0{,}2-0{,}8)}{(0{,}6-0{,}1)(0{,}6-0{,}8)} +$$

$$4{,}953 \frac{(0{,}2-0{,}1)(0{,}2-0{,}6)}{(0{,}8-0{,}1)(0{,}8-0{,}6)} \rightsquigarrow L_2(0{,}2) = 1{,}414.$$

- Sendo $f(0{,}2) = e^{2 \cdot 0{,}2} \approx 1{,}492$.
- Erro menor que $L_1(0{,}2)$.
- Grau do polinômio aumenta, exatidão melhora.
- Interpolação de Lagrange requer menor esforço computacional que resolver um sistema linear.

Dispositivo prático

- Seja a matriz

$$G = \begin{bmatrix} x - x_0 & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 & \cdots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & x - x_1 & x_1 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & x - x_2 & \cdots & x_2 - x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \cdots & x - x_n \end{bmatrix}.$$

- Acrescentando o termo $(x - x_i)/(x - x_i)$ na fórmula de Lagrange

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \left(\frac{x - x_i}{x - x_i} \right) \longrightarrow$$

$$\boxed{L_n(x) = G_d \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{G_i}}.$$

- G_d: produto dos elementos da diagonal de G.

- G_i: produto dos elementos da $(i+1)$-ésima linha de G.

Exemplo

- Determinar $L_2(0{,}2)$ usando

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

.

- Matriz G

$$\begin{bmatrix} x-x_0 & x_0-x_1 & x_0-x_2 \\ x_1-x_0 & x-x_1 & x_1-x_2 \\ x_2-x_0 & x_2-x_1 & x-x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}2-0{,}1 & 0{,}1-0{,}6 & 0{,}1-0{,}8 \\ 0{,}6-0{,}1 & 0{,}2-0{,}6 & 0{,}6-0{,}8 \\ 0{,}8-0{,}1 & 0{,}8-0{,}6 & 0{,}2-0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}5 & -0{,}7 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{bmatrix}.$$

- Produtos de G

$$G_d = (0{,}1)(-0{,}4)(-0{,}6) = 0{,}024,$$

$$G_0 = (0{,}1)(-0{,}5)(-0{,}7) = 0{,}035,$$

$$G_1 = (0{,}5)(-0{,}4)(-0{,}2) = 0{,}040,$$

$$G_2 = (0{,}7)(0{,}2)(-0{,}6) = -0{,}084.$$

- Valor interpolado

$$L_2(x) = G_d\left(\frac{y_0}{G_0} + \frac{y_1}{G_1} + \frac{y_2}{G_2}\right),$$

$$L_2(0{,}2) = 0{,}024\left(\frac{1{,}221}{0{,}035} + \frac{3{,}320}{0{,}040} + \frac{4{,}953}{-0{,}084}\right) \rightsquigarrow$$

$$L_2(0{,}2) = 1{,}414.$$

Algoritmo: interpolação de Lagrange

```
Algoritmo Polinômio_Lagrange
{ Objetivo: Interpolar valor em tabela }
  { usando polinômio de Lagrange }
parâmetros de entrada m, x, y, z
  { número de pontos, abscissas, ordenadas }
  { e valor a interpolar }
parâmetros de saída r  { valor interpolado }
  r ← 0
  para i ← 1 até m faça
    c ← 1; d ← 1
    para j ← 1 até m faça
      se i ≠ j então
        c ← c ∗ (z − x(j)); d ← d ∗ (x(i) − x(j))
      fim se
    fim para
    r ← r + y(i) ∗ c/d
  fim para
fim algoritmo
```

Complexidade: interpolação de Lagrange

Operações	Complexidade
Adições	$2n^2 + 3n + 1$
Multiplicações	$2n^2 + 3n + 1$
Divisões	$n + 1$

- n: grau do polinômio interpolador.

Polinômios de Newton

- Pontos (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ de $y = f(x)$.
- Operador de diferença dividida Δ.
- Ordem 0

$$\Delta^0 y_i = y_i = [x_i].$$

- Ordem 1

$$\Delta y_i = \frac{\Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = [x_i, x_{i+1}].$$

- Ordem 2

$$\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i} = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}].$$

- Ordem n

$$\Delta^n y_i = \frac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i} = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}].$$

Propriedade das diferenças divididas

- **Teorema (Diferenças divididas)**
  Se $y = f(x)$ for um polinômio de grau n, então suas diferenças divididas de ordem $n+1$ são identicamente nulas: $[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = 0 \; \forall \; x$.

- Sendo

$$\Delta^n y_i = \frac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i}.$$

- Verificar a tabela de diferenças divididas de $y = 5x^3 - 2x^2 - x + 3$ para $x_i \in [0;\ 0{,}9]$.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,0	3,000	−1,20	0,5	5	0
1	0,2	2,760	−1,05	2,5	5	0
2	0,3	2,655	−0,55	5,0	5	
3	0,4	2,600	1,45	8,0		
4	0,7	3,035	5,45			
5	0,9	4,125				

.

Fórmula de Newton

- Sejam $n+1$ pontos (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, com x_i distintos, do polinômio $P(x)$ de grau n.
- Pela definição de diferenças divididas

$$[x, x_0] = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0},$$

$$P(x) = P(x_0) + [x, x_0](x - x_0).$$

$$[x, x_0, x_1] = \frac{[x, x_0] - [x_0, x_1]}{x - x_1} \leadsto$$

$$[x, x_0] = [x_0, x_1] + [x, x_0, x_1](x - x_1).$$

- Substituindo

$$P(x) = P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + \\ [x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1).$$

$$[x, x_0, x_1, x_2] = \frac{[x, x_0, x_1] - [x_0, x_1, x_2]}{x - x_2} \leadsto$$

$$[x, x_0, x_1] = [x_0, x_1, x_2] + [x, x_0, x_1, x_2](x - x_2).$$

Fórmula de Newton cont.

- Substituindo

$$P(x) = P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + [x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

- Continuando o desenvolvimento de $[x, x_0, x_1, x_2]$

$$P(x) = P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + [x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + [x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) + [x, x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

- Sendo $P(x)$ polinômio de grau n, pelo teorema $[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = 0$.

- Polinômio de Newton de grau n

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \Delta^n y_0(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}),$$

$$\boxed{P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)}.$$

Exemplo

- Calcular $P_1(0{,}2)$ a partir dos dados

x	0,1	0,6
y	1,221	3,320

.

- Tabela de diferenças divididas

i	x_i	y_i	Δy_i
0	0,1	1,221	4,198
1	0,6	3,320	

.

- Para $n = 1$

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 (x - x_0),$$

$$P_1(0{,}2) = 1{,}221 + 4{,}198 \cdot (0{,}2 - 0{,}1) \rightsquigarrow$$

$$P_1(0{,}2) = 1{,}641.$$

- Verifica-se que

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 (x - x_0) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Exemplo

- Determinar $P_2(1{,}2)$, usando a tabela de diferenças divididas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	0,9	3,211	−2,010	0,620
1	1,1	2,809	−1,328	
2	2,0	1,614		

.

- Para $n = 2$

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1),$$

$$P_2(1{,}2) = 3{,}211 + (-2{,}010)(1{,}2 - 0{,}9) +$$

$$(0{,}620)(1{,}2 - 0{,}9)(1{,}2 - 1{,}1) \leadsto$$

$$P_2(1{,}2) = 2{,}627.$$

Exemplo

- Calcular $P_4(0{,}2)$ a partir da tabela

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1	0,3162	1,1575	−1,0317	1,1468	−1,2447
1	0,3	0,5477	0,8480	−0,4583	0,4000	
2	0,4	0,6325	0,7105	−0,2983		
3	0,6	0,7746	0,6210			
4	0,7	0,8367				

.

- Para $n = 4$

$$P_4(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) +$$
$$\Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$\Delta^3 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$\Delta^4 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$
$$P_4(0{,}2) = 0{,}3162 + 1{,}1575 \cdot 0{,}1 +$$
$$(-1{,}0317)(0{,}1)(-0{,}1) +$$
$$1{,}1468 \cdot (0{,}1)(-0{,}1)(-0{,}2) +$$
$$(-1{,}2447)(0{,}1)(-0{,}1)(-0{,}2)(-0{,}4) \leadsto$$
$$P_4(0{,}2) = 0{,}4456.$$

Avaliação do polinômio de Newton

- Seja o polinômio

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

- Avaliando pelo processo de Horner

$$P_n(z) = (\ldots(\Delta^n y_0 (z - x_{n-1}) + \Delta^{n-1} y_0)(z - x_{n-2}) +$$

$$\ldots + \Delta^2 y_0)(z - x_1) + \Delta y_0)(z - x_0) + y_0.$$

- Armazenagem do vetor auxiliar Dely

i	x_i	y_i	$\text{Dely}_i^{(1)}$	$\text{Dely}_i^{(2)}$	$\text{Dely}_i^{(3)}$	$\text{Dely}_i^{(4)}$
1	x_0	y_0	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^0 y_0$
2	x_1	y_1	Δy_0	Δy_0	Δy_0	Δy_0
3	x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^2 y_0$
4	x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^3 y_0$
5	x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$

Algoritmo: interpolação de Newton

```
Algoritmo Polinômio_Newton
{ Objetivo: Interpolar valor em tabela }
  { usando polinômio de Newton }
parâmetros de entrada m, x, y, z
  { número de pontos, abscissas, ordenadas }
  { e valor a interpolar }
parâmetros de saída r { valor interpolado }
  para i ← 1 até m faça
    Dely(i) ← y(i)
  fim para
  { Construção das diferenças divididas }
  para k ← 1 até m − 1 faça
    para i ← m até k + 1 passo −1 faça
      Dely(i)←(Dely(i)–Dely(i–1))/(x(i)–x(i–k))
    fim para
  fim para
  { Avaliação pelo processo de Horner }
  r ← Dely(m)
  para i ← m − 1 até 1 passo −1 faça
    r ← r ∗ (z − x(i)) + Dely(i)
  fim para
fim algoritmo
```

Complexidade: interpolação de Newton

Operações	Complexidade
Adições	$n^2 + 3n$
Multiplicações	n
Divisões	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

- n: grau do polinômio interpolador.

Polinômios de Gregory-Newton

- Função $y = f(x)$ passa pelos pontos (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sendo $x_{i+1} - x_i = h \; \forall \; i$.
- Operador de diferença finita ascendente Δ
- Ordem 0

$$\Delta^0 y_i = y_i.$$

- Ordem 1

$$\Delta y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i = y_{i+1} - y_i.$$

- Ordem 2

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i.$$

- Ordem n

$$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i.$$

Exemplo

- Verificar a tabela de diferenças finitas

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	3,5	9,82	1,09	0,05	−0,10	2,11
1	4,0	10,91	1,14	−0,05	2,01	
2	4,5	12,05	1,09	1,96		
3	5,0	13,14	3,05			
4	5,5	16,19				

.

- Relação entre operadores $\Delta\!\!\!\!\!\;|\;$ e Δ

$$\boxed{\Delta\!\!\!\!\!\;|\;^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}}.$$

- Por exemplo

$$\Delta\!\!\!\!\!\;|\; y_0 = \frac{\Delta y_0}{1!h} \rightsquigarrow \frac{10{,}91 - 9{,}82}{4{,}0 - 3{,}5} = \frac{1{,}09}{1!\,0{,}5} = 2{,}18;$$

$$\Delta\!\!\!\!\!\;|\;^2 y_1 = \frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2} \rightsquigarrow \frac{\Delta\!\!\!\!\!\;|\; y_2 - \Delta\!\!\!\!\!\;|\; y_1}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1},$$

$$\Delta\!\!\!\!\!\;|\;^2 y_1 = \frac{\frac{13{,}14 - 12{,}05}{5{,}0 - 4{,}5} - \frac{12{,}05 - 10{,}91}{4{,}5 - 4{,}0}}{5{,}0 - 4{,}0} = \frac{-0{,}05}{2!\,0{,}5^2} = -0{,}10.$$

Fórmula de Gregory-Newton

- Polinômio de Newton

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \Delta^n y_0(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

- Variável auxiliar

$$u_x = u(x) = \frac{x - x_0}{h}.$$

- Verifica-se que

$$x - x_0 = hu_x,$$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hu_x - h \leadsto$$

$$x - x_1 = h(u_x - 1),$$

$$x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = x - x_0 - 2h = hu_x - 2h \leadsto$$

$$x - x_2 = h(u_x - 2),$$

$$\vdots$$

Fórmula de Gregory-Newton cont.

- Continuando

$$x-x_{n-1}=x-(x_0+(n-1)h)=x-x_0-(n-1)h \leadsto$$

$$x-x_{n-1}=h(u_x-n+1).$$

- Substituindo na fórmula de Newton e aplicando a relação entre operadores

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} hu_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} hu_x h(u_x-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} hu_x h(u_x-1)\ldots h(u_x-n+1).$$

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} u_x(u_x-1)\ldots(u_x-n+1)$$

$$\boxed{P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j)}.$$

Exemplo

- Calcular $P_1(0{,}2)$, usando os dados da tabela

i	x_i	y_i	Δy_i
0	0,1	1,221	2,099
1	0,6	3,320	

.

- Variável $u_x = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2.$

- Para $n = 1$

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x,$$

$$P_1(0{,}2) = 1{,}221 + 2{,}099 \cdot 0{,}2 \rightsquigarrow$$

$$P_1(0{,}2) = 1{,}641.$$

- Verifica-se que

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Exemplo

- Calcular $P_2(115)$ a partir da tabela

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	110	2,041	0,038	$-0{,}003$
1	120	2,079	0,035	
2	130	2,114		

.

- Variável $u_x = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{115 - 110}{10} = 0{,}5.$

- Para $n = 2$

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x - 1),$$

$$P_2(115) = 2{,}041 + (0{,}038)(0{,}5) +$$

$$\frac{-0{,}003}{2}(0{,}5)(0{,}5 - 1) \leadsto$$

$$P_2(115) = 2{,}060.$$

Avaliação do pol. de Gregory-Newton

- Seja o polinômio

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j).$$

- Avaliando pelo processo de Horner

$$P_n(x) = \Bigg(\Bigg(\Bigg(\ldots\Bigg(\Delta^n y_0 \frac{u_x - n + 1}{n}\Bigg) + \ldots$$

$$+ \Delta^2 y_0\Bigg) \frac{u_x - 1}{2} + \Delta y_0\Bigg) \frac{u_x - 0}{1}\Bigg) + y_0.$$

- Armazenagem do vetor auxiliar Dely

i	x_i	y_i	$\text{Dely}_i^{(1)}$	$\text{Dely}_i^{(2)}$	$\text{Dely}_i^{(3)}$
1	x_0	y_0	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^0 y_0$	$\Delta^0 y_0$
2	x_1	y_1	Δy_0	Δy_0	Δy_0
3	x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^2 y_0$
4	x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$

.

Algoritmo: interpolação de Gregory-Newton

```
Algoritmo Polinômio_Gregory-Newton
{ Objetivo: Interpolar valor em tabela usando }
  { polinômio de Gregory-Newton }
parâmetros de entrada m, x, y, z
  { número de pontos, abscissas, ordenadas }
  { e valor a interpolar }
parâmetros de saída r  { valor interpolado }
  para i ← 1 até m faça
    Dely(i) ← y(i)
  fim para
  { Construção das diferenças finitas }
  para k ← 1 até m − 1 faça
    para i ← m até k + 1 passo −1 faça
      Dely(i) ← Dely(i) − Dely(i − 1)
    fim para
  fim para
  { Avaliação pelo processo de Horner }
  u ← (z − x(1))/(x(2) − x(1))
  r ← Dely(m)
  para i ← m − 1 até 1 passo −1 faça
    r ← r ∗ (u − i + 1)/i + Dely(i)
  fim para
fim algoritmo
```

Complexidade: Gregory-Newton

Operações	Complexidade
Adições	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 2$
Multiplicações	n
Divisões	$n + 1$

- n: grau do polinômio interpolador.
- Complexidade menor que interpolação de Newton.

Escolha dos pontos para interpolação

- Exemplos usando todos os pontos da tabela.
- Escolher $n+1$ pontos dentre os m valores de uma tabela, sendo $m > n+1$.
- Construir um polinômio interpolador de grau n.
- Não se deve construir polinômios de grau elevado por causa do erro de arredondamento.
- Deve-se evitar uma extrapolação na qual

  $z \notin [x_0, x_n]$.

Exemplo

- Calcular $L_3(1{,}4)$, usando os dados da tabela

x	0,7	1,2	1,3	1,5	2,0	2,3	2,6
y	0,043	1,928	2,497	3,875	9,000	13,467	19,176

.

- São necessários 4 pontos para determinar um polinômio interpolador de grau 3.
- Ponto interpolado deve ser o mais próximo destes 4 pontos.
- Passo 1: escolher 2 pontos sendo que $z = 1{,}4$ esteja entre eles, 1,3 e 1,5.
- Passo 2: terceiro ponto será 1,2 e não 2,0
  $1{,}4 - 1{,}2 < 2{,}0 - 1{,}4$.
- Passo 3: quarto ponto será 2,0 e não 0,7
  $2{,}0 - 1{,}4 < 1{,}4 - 0{,}7$.
- A interpolação cúbica utilizará os quatro pontos

i	0	1	2	3
x_i	1,2	1,3	1,5	2,0
y_i	1,928	2,497	3,875	9,000

.

Cálculo de $L_3(1,4)$

- Pontos utilizados

i	0	1	2	3
x_i	1,2	1,3	1,5	2,0
y_i	1,928	2,497	3,875	9,000

.

- Matriz G

$$G = \begin{bmatrix} 1{,}4-1{,}2 & 1{,}2-1{,}3 & 1{,}2-1{,}5 & 1{,}2-2{,}0 \\ 1{,}3-1{,}2 & 1{,}4-1{,}3 & 1{,}3-1{,}5 & 1{,}3-2{,}0 \\ 1{,}5-1{,}2 & 1{,}5-1{,}3 & 1{,}4-1{,}5 & 1{,}5-2{,}0 \\ 2{,}0-1{,}2 & 2{,}0-1{,}3 & 2{,}0-1{,}5 & 1{,}4-2{,}0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}3 & -0{,}8 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 & -0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}5 & -0{,}6 \end{bmatrix}.$$

- Produtos de G

$$G_d = (0{,}2)(0{,}1)(-0{,}1)(-0{,}6) = 1{,}2\times10^{-3},$$

$$G_0 = (0{,}2)(-0{,}1)(-0{,}3)(-0{,}8) = -4{,}8\times10^{-3},$$

$$G_1 = (0{,}1)(0{,}1)(-0{,}2)(-0{,}7) = 1{,}4\times10^{-3},$$

$$G_2 = (0{,}3)(0{,}2)(-0{,}1)(-0{,}5) = 3{,}0\times10^{-3},$$

$$G_3 = (0{,}8)(0{,}7)(0{,}5)(-0{,}6) = -1{,}68\times10^{-1}.$$

Cálculo de $L_3(1,4)$ cont.

- Para $n = 3$

$$L_3(x) = G_d \left(\frac{y_0}{G_0} + \frac{y_1}{G_1} + \frac{y_2}{G_2} + \frac{y_3}{G_3} \right),$$

$$L_3(1{,}4) = 1{,}2\times10^{-3} \left(\frac{1{,}928}{-4{,}8\times10^{-3}} + \right.$$

$$\left. \frac{2{,}497}{1{,}4\times10^{-3}} + \frac{3{,}875}{3{,}0\times10^{-3}} + \frac{9{,}000}{-1{,}68\times10^{-1}} \right) \leadsto$$

$$L_3(1,4) = 3{,}144.$$

Erro de truncamento da interpolação

- Erro cometido ao aproximar uma função $f(x)$ por um polinômio interpolador $P(x)$.
- Sendo $P_n(x)$ um polinômio interpolador de grau n de Lagrange, Newton ou Gregory-Newton

$$\boxed{T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \; x_0 < \xi < x_n}.$$

- Função $f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$ que contém os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
- Supondo que a derivada $f^{n+1}(x)$ exista e que seja contínua no intervalo (a, b).
- Na prática ξ é tomado como o ponto no intervalo $[x_0, x_n] \subset (a, b)$, onde $f^{n+1}(x)$ apresenta o maior valor em módulo.
- Expressão de $T_n(x)$ fornece a cota máxima do erro de truncamento cometido.

Exemplo

- Sendo $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$, calcular $P_2(0{,}1)$ e $T_2(0{,}1)$ a partir da tabela

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	0,0	1,0000	0,1232	0,2848
1	0,2	1,1232	0,4080	
2	0,4	1,5312		

.

- Cálculo de $P_2(0{,}1)$

$$u_x = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0{,}1 - 0{,}0}{0{,}2} \rightsquigarrow u_x = 0{,}5,$$

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2} u_x(u_x - 1),$$

$$P_2(0{,}1) = 1{,}0000 + 0{,}1232(0{,}5) +$$

$$\frac{0{,}2848}{2}(0{,}5)(0{,}5 - 1)$$

$$\rightsquigarrow P_2(0{,}1) = 1{,}0260.$$

Cálculo do erro de truncamento

- Cálculo de $T_2(0{,}1)$

$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1,\ f'(x) = 8x^3 + 6x,$

$f''(x) = 24x^2 + 6,\ f'''(x) = 48x \rightsquigarrow$

$\xi = 0{,}4.$

$$T_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

$$T_2(0{,}1) = \frac{48(0{,}4)}{6}(0{,}1 - 0{,}0)(0{,}1 - 0{,}2)(0{,}1 - 0{,}4)$$

$\rightsquigarrow T_2(0{,}1) = 0{,}0096.$

- Cota máxima do erro de truncamento.
- Erro real cometido

$|f(0{,}1) - P_2(0{,}1)| = |1{,}0302 - 1{,}0260|$

$\rightsquigarrow 0{,}0042 < T_2(0{,}1).$

Influência da escolha dos pontos no erro

- Análise teórica da interpolação.
- Erro de truncamento é diretamente proporcional ao produto das distâncias entre o valor interpolado e os pontos base

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \; x_0 < \xi < x_n.$$

- Pontos escolhidos para construir o polinômio interpolador devem ser os mais próximos do ponto a ser interpolado.

Exemplo

- Verificar a influência da escolha dos pontos no erro de truncamento, usando a função

$$f(x) = e^x - x^2 - x.$$

- Tabelando $f(x)$, $x \in [1{,}1;\ 3{,}2]$

x	1,1	1,4	1,9	2,1	2,5	3,0	3,2
y	0,6942	0,6952	1,1759	1,6562	3,4325	8,0855	11,0925

- Calcular $P_2(2{,}2)$.

- Pontos de abscissas $x = 2{,}1$ e $x = 2{,}5$.

- Terceiro ponto pode ser e $x_a = 1{,}9$ ou $x_b = 3{,}0$.

Cálculo de $P_2(2{,}2)$ com $x_a = 1{,}9$

- Cálculo de $P_{2,a}(2{,}2)$ com $x_a = 1{,}9$, por Newton

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	1,9	1,1759	2,4015	3,3988
1	2,1	1,6562	4,4408	
2	2,5	3,4325		

.

- Para $n = 2$

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 (x - x_0) + \Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1),$$

$$P_{2,a}(2{,}2) = 1{,}1759 + 2{,}4015(2{,}2 - 1{,}9) +$$

$$3{,}3988(2{,}2 - 1{,}9)(2{,}2 - 2{,}1)$$

$$\leadsto P_{2,a}(2{,}2) = 1{,}9983.$$

Cálculo de $T_2(2{,}2)$ com $x_a = 1{,}9$

- Erro de truncamento para $n = 2$

$$T_{2,a}(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \xi \in (x_0, x_2).$$

- Cota máxima do erro de truncamento

$$f'''(x) = e^x, \xi \in (1{,}9; 2{,}5) \to \xi = 2{,}5;$$

$$T_{2,a}(2{,}2) = \frac{e^{2{,}5}}{6}(2{,}2 - 1{,}9)(2{,}2 - 2{,}1)(2{,}2 - 2{,}5)$$

$$\rightsquigarrow T_{2,a}(2{,}2) = -0{,}0183.$$

- Sinal negativo indica interpolação por excesso

$$P_{2,a}(2{,}2) > f(2{,}2).$$

- Erro real cometido

$$|f(2{,}2) - P_{2,a}(2{,}2)| = |1{,}9850 - 1{,}9983|,$$

$$0{,}0133 < |T_{2,a}(2{,}2)|.$$

Cálculo de $P_2(2{,}2)$ com $x_b = 3{,}0$

❑ Cálculo de $P_{2,b}(2{,}2)$ com $x_b = 3{,}0$, por Newton

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	2,1	1,6562	4,4408	5,4058
1	2,5	3,4325	9,3060	
2	3,0	8,0855		

.

❑ Para $n = 2$

$$P_{2,b}(2{,}2) = 1{,}6562 + 4{,}4408(2{,}2 - 2{,}1) +$$

$$5{,}4058(2{,}2 - 2{,}1)(2{,}2 - 2{,}5)$$

$$\leadsto P_{2,b}(2{,}2) = 1{,}9381.$$

Cálculo de $T_2(2{,}2)$ com $x_b = 3{,}0$

- Cota máxima do erro de truncamento

  $f'''(x) = e^x, \xi \in (2{,}1; 3{,}0) \rightarrow \xi = 3{,}0;$

  $T_{2,b}(2{,}2) = \dfrac{e^{3{,}0}}{6}(2{,}2-2{,}1)(2{,}2-2{,}5)(2{,}2-3{,}0)$

  $\rightsquigarrow T_{2,b}(2{,}2) = 0{,}0803.$

- Valor positivo indica interpolação por falta

  $P_{2,b}(2{,}2) < f(2{,}2).$

- Erro real cometido

  $|f(2{,}2) - P_{2,b}(2{,}2)| = |1{,}9850 - 1{,}9381|,$

  $0{,}0469 < |T_{2,b}(2{,}2)|.$

- Ponto base $x_a = 1{,}9$ está mais próximo do valor interpolado $z = 2{,}2$ do que $x_b = 2{,}5$

  $|f(2{,}2) - P_{2,a}(2{,}2)| < |f(2{,}2) - P_{2,b}(2{,}2)|$

  $\rightsquigarrow |T_{2,a}(2{,}2)| < |T_{2,b}(2{,}2)|.$