2. Sistemas lineares

2.1 Conceitos fundamentais.

2.2 Sistemas triangulares.

2.3 Eliminação de Gauss.

2.4 Decomposição LU.

2.5 Decomposição de Cholesky.

2.6 Decomposição espectral.

2.7 Uso da decomposição.

2.8 Métodos iterativos estacionários.

2.9 Análise de erro na solução de sistemas.

2.10 Estudos de caso:

- Tensões em circuito elétrico.
- Estequiometria de reação química.

2.11 Exercícios

Conceitos fundamentais

- Matriz é um conjunto de elementos dispostos em forma retangular.

- Tamanho ou dimensão definido pelo número de linhas e colunas.

- Elementos da matriz delimitados por colchetes ou parênteses

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Elemento referenciado por dois índices

  - o primeiro indica a linha e

  - o segundo a coluna onde está o elemento.

Formas de matrizes

- Coluna: $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$.

- Linha: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}$.

- Nula: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

- Diagonal: $\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$.

- Identidade: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

Formas de matrizes cont.

- Triangular inferior: $\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$.

- Triangular superior: $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$.

- Densa: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -9 \\ 5 & 8 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- Esparsa: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

- Simétrica

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } M^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Operações matriciais

- Transposição

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

- Adição e subtração

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } D = A - B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

- Multiplicação por escalar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Operações matriciais cont.

- Multiplicação por vetor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \; v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow x = Av = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

- Multiplicação por matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 41 & 48 \end{bmatrix}.$$

- Produto interno e externo

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$k = x^T y = 10 \text{ e } M = xy^T = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 20 \\ -1 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determinante

- Definição

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(M_{1n}).$$

- Particularmente

$$A = \left[\begin{array}{c} a_{11} \end{array}\right] \longrightarrow \det(A) = a_{11},$$

$$A = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right] \longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - \\ &\quad a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\ &\quad a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}). \end{aligned}$$

- Exemplo

$$A = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \det(A) = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 6.$$

- Matriz singular: $\det(A) = 0$.

Posto

- Vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearmente dependentes $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$.

- Escalares α_1, α_2, $\ldots$, α_n, não todos nulos.

- Vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearmente independentes se a igualdade acima só se verificar com os α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ iguais a zero.

- Posto de A: o número máximo de vetores linhas ou colunas de A que são linearmente independentes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -7 & 8 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

- Linhas 2 e 4 obtidas pela combinação linear das linhas 1 e 3: $L2 = L1 + L3$ e $L4 = 2L1 - L3$.

- posto(A)=2.

Traço

- Soma dos elementos da diagonal principal

$$\text{traço(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

- $\text{traço}(A) = 5 + 3 + 9 = 17.$

Inversa

- Inversa da matriz $A = A^{-1}$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

- Lei comutativa existe para o produto de uma matriz por sua inversa.

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{e}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operações com transposta e inversa

- $(A^T)^T = A$.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$.
- Se $A = BCD$, então

  $A^T = D^T C^T B^T$ e $A^{-1} = D^{-1} C^{-1} B^{-1}$.

- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

Autovalores e autovetores

- Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

- e a igualdade

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Matriz A possui um autovalor $\lambda = 2$ e um correspondente autovetor $v = [1 \;\; 2]^T$.
- Também é verdade para $\lambda = 4$ e $v = [2 \;\; 3]^T$.
- Relação fundamental

$$Av = \lambda v.$$

Problema do autovalor

- Solução não trivial de $(A - \lambda I)v = 0$.
- **Teorema**

  Se M for uma matriz de ordem n, então o sistema homogêneo $My = 0$ tem solução não trivial se, e somente se, M for singular.
- Pelo teorema e sabendo que uma matriz singular tem determinante nulo

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

- Para a matriz A dada

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 10-\lambda & -4 \\ 12 & -4-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0,$$

$$(10-\lambda)(-4-\lambda) - 12(-4) = 0 \longrightarrow$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0.$$

- Valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.

Polinômio característico

- Determinante $D_n(\lambda) = \det(A - \lambda I)$,

$$D_n(\lambda)=\det\left(\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\right).$$

- Polinômio $D_n(\lambda)$ de grau n.
- Os n zeros λ_i de $D_n(\lambda)$: autovalores de A.
- Expandindo o determinante para $n = 3$

$$\begin{aligned} D_3(\lambda) = {} & -\lambda^3+[a_{11}+a_{22}+a_{33}]\lambda^2- \\ & [(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})+(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}) \\ & +(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})]\lambda+ \\ & [a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}- \\ & a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})], \end{aligned}$$

- $D_3(\lambda) = c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$.
- $c_{n-1} = c_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \text{traço}(A)$.
- $c_0 = \det(A)$.

Relações de Girard

❑ Relações entre raízes e coeficientes

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\frac{c_{n-1}}{c_n} \text{ e}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n \frac{c_0}{c_n}.$$

❑ Duas importantes propriedades

- Soma dos elementos da diagonal principal é igual à soma dos autovalores

$$\text{traço}(A) = -\frac{c_{n-1}}{c_n} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

- Determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus autovalores

$$\det(A) = (-1)^n \frac{c_0}{c_n} \longrightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

❑ Uma matriz singular tem, no mínimo, um autovalor nulo.

Exemplo das propriedades

- Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\text{traço}(A) = 10 + (-4) = 6 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 4,$$

$$\det(A) = 10(-4) - 12(-4) = 8 = \lambda_1 \lambda_2 = 2 \cdot 4.$$

- Uma matriz com elementos reais tem seu polinômio característico com coeficientes reais.

- Uma matriz com elementos reais tem autovalores reais e/ou complexos conjugados em pares.

Exemplo de autovalores

- Calcular os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
- Polinômio característico

$$D_2(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right),$$

$$D_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

- Zeros do polinômio característico $D_2(\lambda)$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2. \end{cases}$$

$$\text{traço}(A) = 2 + (-1) = 1 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 3 + (-2),$$

$$\det(A) = 2(-1) - 2 \cdot 2 = -6 = \prod_{i=1}^{2} \lambda_i = 3(-2).$$

- Calcular autovalores usando o polinômio característico é computacionalmente ineficiente.

Propriedades dos autovalores

- Considerando que $\det(A) = \det(A^T)$, então os autovalores λ de A, representados por $\lambda(A)$, são iguais a $\lambda(A^T)$.

- Se A for uma matriz triangular de ordem n

$$\det(A-\lambda I)=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)=0.$$

- O posto de matriz quadrada é igual ao número de autovalores não nulos.

- Se λ_i são os autovalores de A, então λ_i^{-1} são os autovalores de A^{-1}

$$Av = \lambda v,$$

$$A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v,$$

$$Iv = \lambda A^{-1}v \longrightarrow A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v.$$

Normas

- Expressar magnitude de vetor ou de matriz.
- Normas vetoriais definidas como norma-p

$$\boxed{\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}}.$$

- Norma-1 ou norma de soma de magnitudes

$$\boxed{\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|}.$$

- Norma-2 ou norma Euclidiana

$$\boxed{\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}}.$$

- Norma-∞ ou norma de máxima magnitude

$$\boxed{\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} = \max_{1\le i\le n} |x_i|}.$$

Condições das normas vetoriais

- Norma vetorial é uma função $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ que associa um número real a cada vetor.

- Satisfaz as condições

$$\|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0,$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

$$\|kx\| = |k|\|x\|,$$

- $x,\ y \in \mathbb{C}^n$ são vetores e $k \in \mathbb{C}$ é um escalar.

Cálculo de norma vetorial

- Calcular as normas 1, 2 e ∞ do vetor

$$x = [3 \; {-5} \;\; 1]^T.$$

$$\|x\|_1 = |3| + |-5| + |1| = 9,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|3|^2 + |-5|^2 + |1|^2} = 5{,}9161,$$

$$\|x\|_\infty = \max(|3|, |-5|, |1|) = 5.$$

Condições das normas matriciais

- As normas satisfazem as condições

  $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0$ se, e somente se, $A = 0$,

  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

  $\|kA\| = |k|\|A\|$,

- A e B são matrizes de mesma ordem e k é um escalar.

Normas matriciais

- Norma-1 ou norma de soma máxima de coluna

$$\boxed{\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|},$$

- Norma-∞ ou norma de soma máxima de linha

$$\boxed{\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|},$$

- Norma de Frobenius

$$\boxed{\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}},$$

- Norma-2 ou norma espectral

$$\boxed{\|A\|_2 = \begin{cases} \lambda_{\text{max}} & \text{se } A = A^T \\ \sigma_{\text{max}} & \text{se } A \neq A^T \end{cases}}$$

  - λ_{max} é o maior autovalor de A em módulo e σ_{max} é o maior valor singular de A,
  - $\sigma_{\text{max}} = \sqrt{\lambda_{\text{max}}(A^T A)}$ (raiz quadrada do maior autovalor em módulo da matriz $A^T A$).

Normas consistentes e subordinadas

- Norma matricial $\|A\|$ é consistente com uma norma vetorial $\|x\|$ se para qualquer matriz A $(n \times n)$ e vetor x $(n \times 1)$

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

- Norma matricial consistente $\|A\|$ é subordinada a uma norma vetorial $\|y\|$ se para qualquer matriz A $(n \times n)$ existe um vetor y $(n \times 1)$, $y \neq 0$

$$\|Ay\| = \|A\|\|y\|.$$

- Se a norma for subordinada, então

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

- As normas matriciais 1, 2 e ∞ são consistentes e subordinadas às respectivas normas vetoriais.

- A norma de Frobenius é consistente, mas não subordinada à norma-2 vetorial.

Exemplo de norma matricial

- Calcular as normas 1, ∞, F e 2 da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\|A\|_1 = \max(|2| + |3|, |-1| + |5|) = \max(5, 6)$$

$$\leadsto \|A\|_1 = 6,$$

$$\|A\|_\infty = \max(|2| + |-1|, |3| + |5|) = \max(3, 8)$$

$$\leadsto \|A\|_\infty = 8,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{|2|^2 + |-1|^2 + |3|^2 + |5|^2} = \sqrt{39}$$

$$\leadsto \|A\|_F = 6{,}2450,$$

$$\|A\|_2 = \max\left(\sqrt{\lambda(A^T A)}\right) = \max(2{,}2284; 5{,}8339)$$

$$\leadsto \|A\|_2 = 5{,}8339.$$

Sistemas de equações lineares

- Conjunto de m equações polinomiais com n variáveis x_i de grau 1

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m.
\end{array}
$$

- Forma matricial

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.
$$

- $Ax = b$, onde A é a matriz dos coeficientes, x é o vetor solução e b é o vetor dos termos independentes.

- Se A for uma matriz quadrada $(n \times n)$ não singular
$Ax = b \longrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \longrightarrow x = A^{-1}b.$

Classificação de sistemas

- Sistema sobredeterminado:
  tem-se mais equações do que incógnitas

  $A\ (m \times n)$, $m \geq n$ e $\text{posto}(A) = n$.

- Problema de quadrados mínimos lineares

  $$\underset{x}{\textbf{minimize}}\ \|b - Ax\|_2.$$

- Sistema subdeterminado:
  existem mais incógnitas do que equações

  $m < n$ e $\text{posto}(A) = m$.

- Sistema não tem solução ou existe um número infinito de soluções.

- Determinar a solução de norma mínima do sistema linear.

- Resolver um sistema de ordem n.

Sistema com única solução

- Exemplo

$$\begin{array}{rl} x_1 + x_2 = & 3 \\ x_1 - x_2 = & -1 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\leadsto \det(A) \neq 0$ e $x = [1\ 2]^T$.

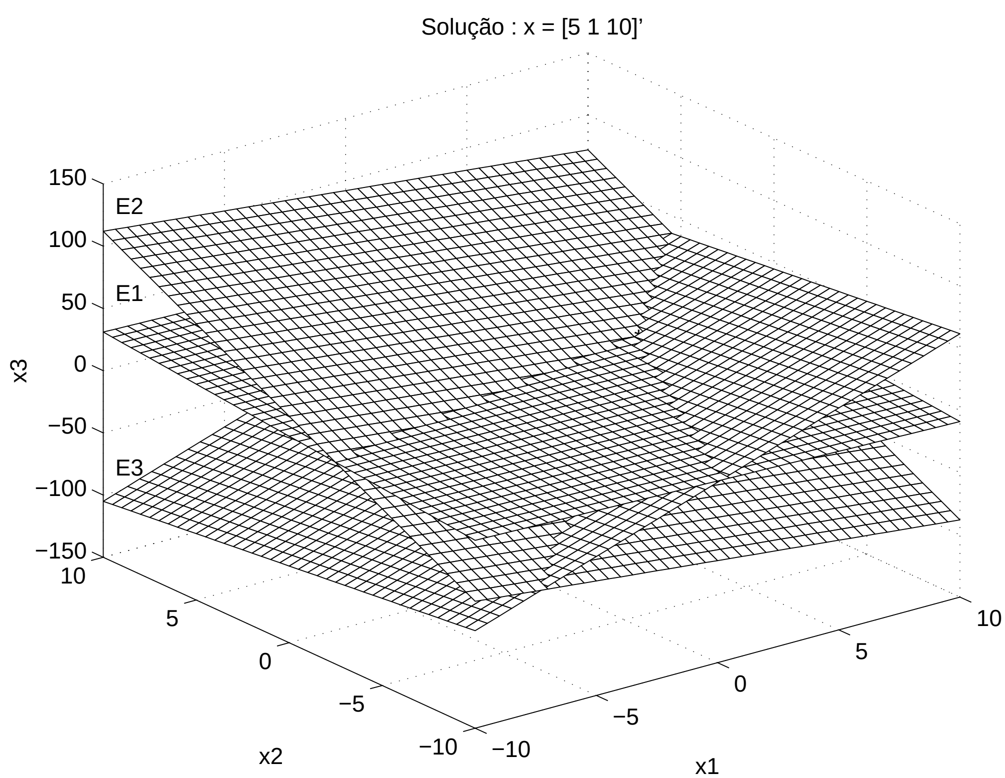
- $\det(A) \neq 0$: sistema admite uma única solução.

Geometria de sist. solução única

- Solução de um sistema linear de ordem n é um ponto no $\mathbb{R}^n$ comum aos n hiperplanos descritos por cada uma das n equações

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -20 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ -65 \end{bmatrix}.$$

- Vetor solução x é a interseção dos três planos descritos por cada uma das três equações E1, E2 e E3: $x = [5\ 1\ 10]^T$.



Sistema com infinitas soluções

- Exemplo

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \quad = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow \det(A) = 0$ e $x = [\theta \;\; 2-\theta]^T$.

- $\det(A) = 0$: sistema admite infinitas soluções, uma para cada valor de θ.

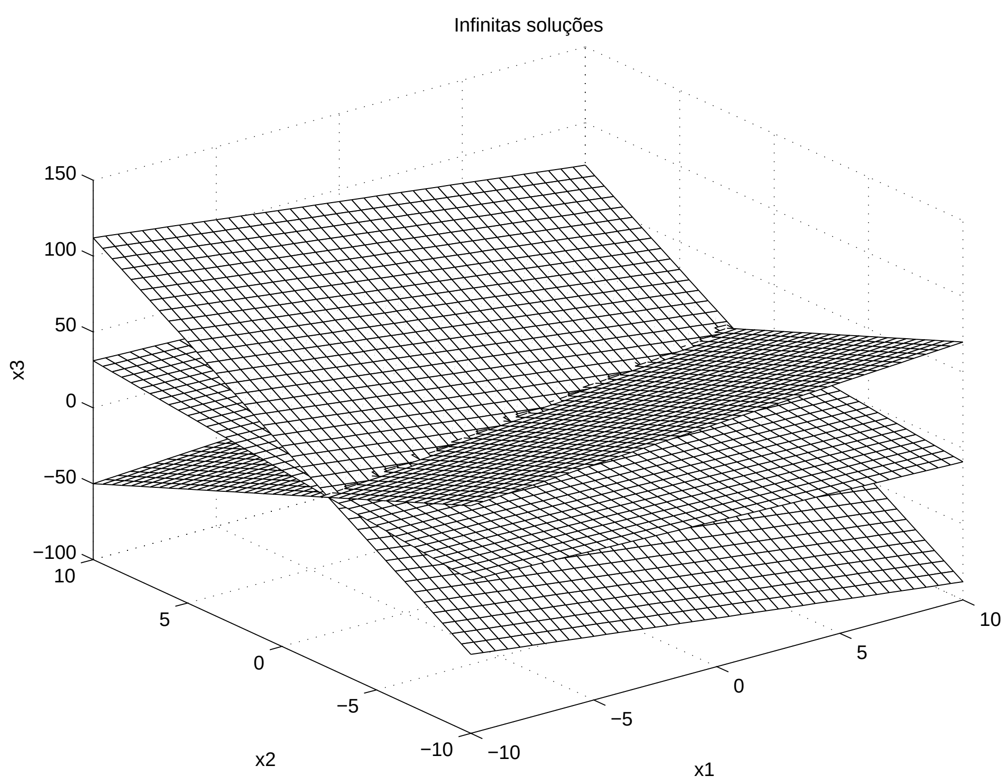
Geometria de sist. infinitas soluções

- Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- Com $\det(A) = 0$, os três planos se interceptam em uma linha reta descrita por $x = [70 - 6{,}5\theta \;\; 16 - 1{,}5\theta \;\; \theta]^T$.

- Para cada valor de θ ter-se-á uma solução do sistema linear.



Sistema sem solução

- Exemplo

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & -1 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\leadsto \det(A) = 0$ e $\nexists\ x$.

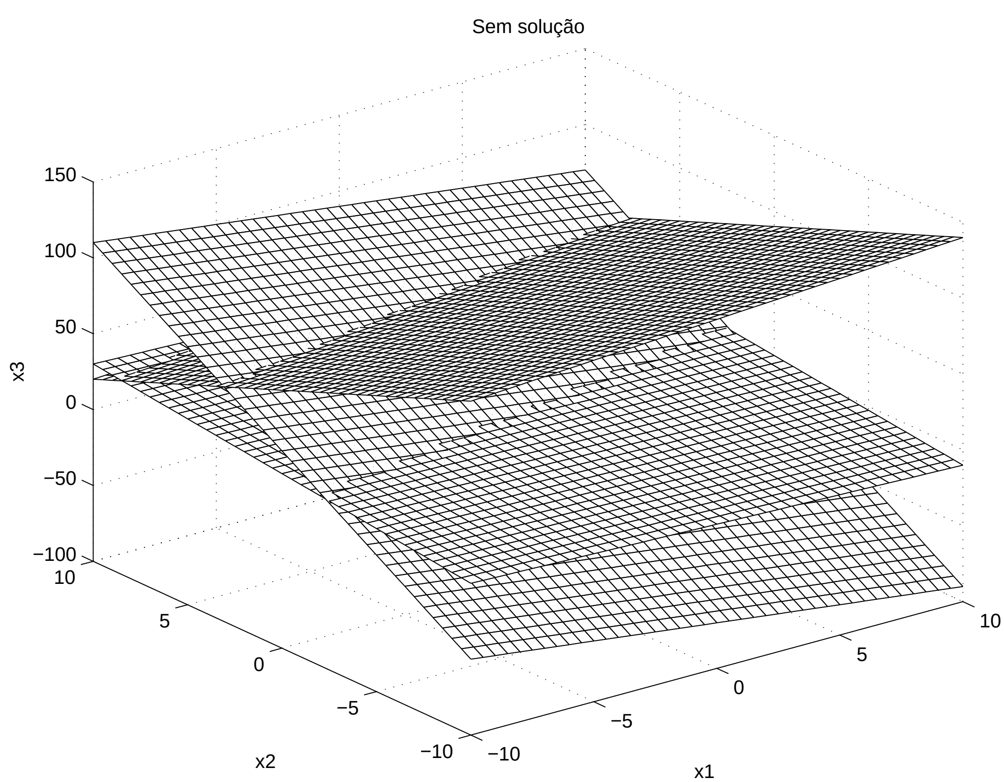
- $\det(A) = 0$: sistema não tem solução.

Geometria de sistema sem solução

- Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

- Com $\det(A) = 0$: nunca se interceptam simultaneamente, ou seja, o sistema acima não admite solução.



Sistema triangular inferior

- Apresenta a forma

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

- Solução via substituições sucessivas

$$l_{11}x_1 = c_1 \rightsquigarrow x_1 = \frac{c_1}{l_{11}},$$

$$l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = c_2 \rightsquigarrow x_2 = \frac{c_2 - l_{21}x_1}{l_{22}},$$

$$l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = c_3$$

$$\rightsquigarrow x_3 = \frac{c_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}},$$

$$\vdots$$

Substituições sucessivas

- Generalizando

$$l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{n,n-1}x_{n-1} + l_{nn}x_n = c_n,$$

$$x_n = \frac{c_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - \cdots - l_{n,n-1}x_{n-1}}{l_{nn}}.$$

- Esquematicamente

$$\boxed{x_i = \frac{c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}},\ i = 1, 2, \ldots, n.}$$

Exemplo de substituições sucessivas

- Calcular a solução do sistema triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$2x_1 = 4,\ x_1 = \frac{4}{2} \leadsto x_1 = 2,$$

$$3x_1 + 5x_2 = 1,\ x_2 = \frac{1 - 3(2)}{5} \leadsto x_2 = -1,$$

$$x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 48,\ x_3 = \frac{48 - (2) + 6(-1)}{8}$$

$$\leadsto x_3 = 5,$$

$$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 6,$$

$$x_4 = \frac{6 + (2) - 4(-1) + 3(5)}{9} \leadsto x_4 = 3.$$

- Solução do sistema: $x = [2\ \ -1\ \ 5\ \ 3]^T$.

Algoritmo: substituições sucessivas

```
Algoritmo Substituições_Sucessivas
{ Objetivo: Resolver sist. triangular inferior }
  { Lx = c pelas substituições sucessivas }
parâmetros de entrada n, L, c
  { ordem, matriz triang. inf. e vetor indep. }
parâmetros de saída x
  { solução do sistema triangular inferior }
  x(1) ← c(1)/L(1, 1)
  para i ← 2 até n faça
    Soma ← 0
    para j ← 1 até i − 1 faça
      Soma ← Soma + L(i,j) ∗ x(j)
    fim para
    x(i) ← (c(i) − Soma)/L(i, i)
  fim para
fim algoritmo
```

Sistema triangular superior

❏ Apresenta a forma

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}.$$

❏ Solução via substituições retroativas

$$u_{nn}x_n = d_n \rightsquigarrow x_n = \frac{d_n}{u_{nn}},$$

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = d_{n-1}$$

$$\rightsquigarrow x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}},$$

$$\vdots$$

Substituições retroativas

- Continuando

$$u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n = d_2$$

$$\rightsquigarrow x_2 = \frac{d_2 - u_{23}x_3 - \cdots - u_{2n}x_n}{u_{22}},$$

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \cdots + u_{1n}x_n = d_1$$

$$\rightsquigarrow x_1 = \frac{d_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - \cdots - u_{1n}x_n}{u_{11}}.$$

- Esquematicamente

$$\boxed{x_i = \frac{d_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}},\ i = n, n-1, \ldots, 1.}$$

Exemplo de substituições retroativas

- Achar solução do sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$2x_4 = 8, \; x_4 = \frac{8}{2} \rightsquigarrow x_4 = 4,$$

$$4x_3 + 5x_4 = 28, \; x_3 = \frac{28 - 5(4)}{4} \rightsquigarrow x_3 = 2,$$

$$3x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -2, \; x_2 = \frac{-2 - 7(2) + 4(4)}{3}$$

$$\rightsquigarrow x_2 = 0,$$

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 = \frac{1 + 2(0) - 6(2) - (4)}{5} \rightsquigarrow x_1 = -3.$$

- Solução do sistema: $x = [-3 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4]^T$.

Algoritmo: substituições retroativas

```
Algoritmo Substituições_Retroativas
{ Objetivo: Resolver sist. triangular superior }
  { Ux = d pelas substituições retroativas }
parâmetros de entrada n, U, d
  { ordem, matriz triang. sup. e vetor indep. }
parâmetros de saída x
  { solução do sistema triangular superior }
  x(n) ← d(n)/U(n, n)
  para i ← n − 1 até 1 passo −1 faça
    Soma ← 0
    para j ← i + 1 até n faça
      Soma ← Soma + U(i, j) ∗ x(j)
    fim para
    x(i) ← (d(i) − Soma)/U(i, i)
  fim para
fim algoritmo
```

Complexidade: subst. sucessivas

- Considerando

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Adições

$$\sum_{i=2}^{n} [(i-1)+1] = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1.$$

- Multiplicações

$$\sum_{i=2}^{n} (i-1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1 - (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

- Divisões

$$1 + \sum_{i=2}^{n} 1 = 1 + n - 1 = n.$$

Complexidade: subst. retroativas

- Adições

$$\sum_{i=1}^{n-1} [(n-i)+1] =$$

$$(n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1.$$

- Multiplicações

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

- Divisões

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} 1 = 1 + n - 1 = n.$$

Eliminação de Gauss

- Classes de métodos para resolução de sistemas lineares.
- Métodos diretos: solução obtida com número finito de operações aritméticas.
- Métodos iterativos: solução exata somente com número infinito de operações.
- Eliminação de Gauss é um exemplo de método direto.

Sistemas equivalentes

- Sistemas de equações lineares que possuem o mesmo vetor solução

$$A\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = & 8 \\ x_1 - x_2 & = & -1 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$B\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & = & -2 \\ x_1 + 4x_2 & = & 9 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^A = x^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A \sim B.$$

Operações l-elementares

- Trocar ordem de duas equações

$$B \left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 - 2x_2 & = & -2 \\ x_1 + 4x_2 & = & 9 \end{array} \right. \text{ e } C \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + 4x_2 & = & 9 \\ 2x_1 - 2x_2 & = & -2 \end{array} \right.$$

$$x^B = x^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow B \sim C.$$

- Multiplicar uma equação por constante não nula

$$C \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + 4x_2 & = & 9 \\ 2x_1 - 2x_2 & = & -2 \end{array} \right. \text{ e } D \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + 4x_2 & = & 9 \\ x_1 - x_2 & = & -1 \end{array} \right.$$

$$x^C = x^D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow C \sim D.$$

- Somar uma equação à outra

$$D \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + 4x_2 & = & 9 \\ x_1 - x_2 & = & -1 \end{array} \right. \text{ e } E \left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 & = & 8 \\ x_1 - x_2 & = & -1 \end{array} \right.$$

$$x^D = x^E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow D \sim E.$$

Sistema triangular equivalente

- Método de eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

- Transformação $Ax = b \sim Ux = d$.

- Solução do sistema triangular superior $Ux = d$ pelas substituições retroativas.

- Vetor resíduo $r = b - Ax$.

Exemplo de eliminação de Gauss

- Resolver o sistema pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Eliminar elementos da primeira coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

- Eliminar elementos da segunda coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

Dispositivo prático

L	multiplicador	A			b	Operações
1		$\underline{1}$	-3	2	11	
2	$m_{21}=-(-2)/1=2$	-2	8	-1	-15	
3	$m_{31}=-(4)/1=-4$	4	-6	5	29	
4		0	$\underline{2}$	3	7	$2L_1+L_2$
5	$m_{32}=-(6)/2=-3$	0	6	-3	-15	$-4L_1+L_3$
6		0	0	$\underline{-12}$	-36	$-3L_4+L_5$

.

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

Vetores solução e resíduo

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas

$$-12x_3 = -36,\ x_3 = \frac{-36}{-12} \rightsquigarrow x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7,\ x_2 = \frac{7 - 3(3)}{2} \rightsquigarrow x_2 = -1,$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11,\ x_1 = \frac{11 + 3(-1) - 2(3)}{1}$$

$$\rightsquigarrow x_1 = 2.$$

- Vetor solução: $x = [2\ \ -1\ \ 3]^T$.
- Vetor resíduo: $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo de eliminação de Gauss

- Resolver o sistema pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 19 & 4 & 15 \\ 1 & 4 & 8 & -12 \\ 5 & 33 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 25 \\ 18 \\ 72 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

L	multiplicador	A				b	Operações
1		$\underline{1}$	6	2	4	8	
2	$m_{21} = -(3)/1 = -3$	3	19	4	15	25	
3	$m_{31} = -(1)/1 = -1$	1	4	8	-12	18	
4	$m_{41} = -(5)/1 = -5$	5	33	9	3	72	
5		0	$\underline{1}$	-2	3	1	$-3L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -(-2)/1 = 2$	0	-2	6	-16	10	$-L_1 + L_3$
7	$m_{42} = -(3)/1 = -3$	0	3	-1	-17	32	$-5L_1 + L_4$
8		0	0	$\underline{2}$	-10	12	$2L_5 + L_6$
9	$m_{43} = -(5)/2 = -2{,}5$	0	0	5	-26	29	$-3L_5 + L_7$
10		0	0	0	$\underline{-1}$	-1	$-2{,}5L_8 + L_9$

- Sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Substituições retroativas

- Sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas

$$-1x_4 = -1, \; x_4 = \frac{-1}{-1} \leadsto x_4 = 1,$$

$$2x_3 - 10x_4 = 12, \; x_3 = \frac{12 + 10(1)}{2} \leadsto x_3 = 11,$$

$$x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \; x_2 = \frac{1 + 2(11) - 3(1)}{1}$$

$$\leadsto x_2 = 20,$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8,$$

$$x_1 = \frac{8 - 6(20) - 2(11) - 4(1)}{1} \leadsto x_1 = -138.$$

Vetores solução e resíduo

- Vetor solução

$$x = \begin{bmatrix} -138 \\ 20 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Vetor resíduo

$$r = \begin{bmatrix} 8 \\ 25 \\ 18 \\ 72 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 19 & 4 & 15 \\ 1 & 4 & 8 & -12 \\ 5 & 33 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -138 \\ 20 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cálculo do determinante

- Determinante da matriz dos coeficientes obtido como um subproduto do método de Gauss.

- Relações entre os determinantes das matrizes dos sistemas equivalentes intermediários obtidos pelas operações l-elementares.

- **a)** Se duas linhas quaisquer de uma matriz A forem trocadas, então, o determinante da nova matriz B será

$$\det(B) = -\det(A).$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 10,$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = -10.$$

Determinante via operações l-elementares

- **b)** Se todos os elementos de uma linha de A forem multiplicados por uma constante k, então, o determinante da matriz resultante B será

  $\det(B) = k\det(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -10,$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = -5.$$

- **c)** Se um múltiplo escalar de uma linha de A for somado à outra linha, então, o determinante da nova matriz B será

  $\det(B) = \det(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -5,$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = -5.$$

Determinante via operações l-elementares

- **d)** Se A for uma matriz triangular ou diagonal de ordem n, então, o seu determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -2,$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = 15.$$

Determinante via operações l-elementares

- **e)** Se uma matriz A for multiplicada por uma matriz B, então, o determinante da matriz resultante C será

$$\det(C) = \det(A)\det(B).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 10,$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = 3,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 13 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(C) = 30.$$

Exemplo de cálculo do determinante

- Calcular o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Seqüência de matrizes obtidas pelas operações l-elementares

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes obtidas somente por combinações lineares das linhas.
- As três matrizes possuem determinante com mesmo valor.
- Determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal, ou seja, o determinante será o produto dos pivôs

$$\det(A) = (1)(2)(-12) = -24.$$

Pivotação parcial

- Método de Gauss falha quando pivô for nulo.
- Consiste em escolher como pivô o maior elemento em módulo da coluna, cujos elementos serão eliminados.
- A pivotação parcial garante que o pivô seja não nulo, exceto quando a matriz for singular.
- Todos os multiplicadores satisfazem

  $-1 \leq m_{ij} \leq 1.$

- Multiplicadores grandes podem ampliar os erros de arredondamento.

Exemplo de pivotação parcial

- Resolver o sistema pelo método de Gauss com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

L	multiplicador	A			b	Operações
1	$m_{11}=-(1)/4=-0{,}25$	1	−3	2	11	
2	$m_{21}=-(-2)/4=0{,}5$	−2	8	−1	−15	
3		$\underline{4}$	−6	5	29	
4	$m_{12}=-(-1{,}5)/5=0{,}3$	0	−1,5	0,75	3,75	$-0{,}25L_3+L_1$
5		0	$\underline{5}$	1,5	−0,5	$0{,}5L_3+L_2$
6		0	0	$\underline{1{,}2}$	3,6	$0{,}3L_5+L_4$

- Sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}6 \end{bmatrix}.$$

Vetor solução

- Sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}6 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas

$$1{,}2x_3 = 3{,}6,\ x_3 = \frac{3{,}6}{1{,}2} \rightsquigarrow x_3 = 3,$$

$$5x_2 + 1{,}5x_3 = -0{,}5,\ x_2 = \frac{-0{,}5 - 1{,}5(3)}{5}$$

$$\rightsquigarrow x_2 = -1,$$

$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 29,\ x_1 = \frac{29 + 6(-1) - 5(3)}{4}$$

$$\rightsquigarrow x_1 = 2.$$

- Vetor solução: $x = [2 \ \ -1 \ \ 3]^T$.

Decomposição LU

- Uma matriz quadrada qualquer pode ser escrita como o produto de duas matrizes.
- Exemplo

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- A matriz A foi fatorada tal que $A = LU$.
- L: matriz triangular inferior unitária.
- U: matriz triangular superior.
- Resolver o sistema $Ax = b$

$$Ax = b \longrightarrow LUx = b,$$

$Ly = b$ e $Ux = y$.

Cálculo dos fatores

- Fatoração por eliminação de Gauss.
- Resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

L	m	A			Operações
1		$\underline{1}$	-3	2	
2	$m_{21} = -(-2)/1 = 2$	-2	8	-1	
3	$m_{31} = -(4)/1 = -4$	4	-6	5	
4		0	$\underline{2}$	3	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = -(6)/2 = -3$	0	6	-3	$-4L_1 + L_3$
6		0	0	$\underline{-12}$	$-3L_4 + L_5$

.

- Matrizes L e U

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Sistema triangular inferior $Ly = b$

- Igualdade $A = LU$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

- Solução do sistema $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix},$$

$$y_1 = 11,$$

$$-2y_1 + y_2 = -15, \; y_2 = -15 + 2(11) \leadsto y_2 = 7,$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 = 29, \; y_3 = 29 - 4(11) - 3(7)$$

$$\leadsto y_3 = -36.$$

- Vetor intermediário: $y = [11 \;\; 7 \;\; -36]^T$.

Sistema triangular superior $Ux = y$

- Solução do sistema $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix},$$

$$-12x_3 = -36,\ x_3 = \frac{-36}{-12} \rightsquigarrow x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7,\ x_2 = \frac{7 - 3(3)}{2} \rightsquigarrow x_2 = -1,$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11,\ x_1 = \frac{11 + 3(-1) - 2(3)}{1}$$

$$\rightsquigarrow x_1 = 2.$$

- Vetor solução: $x = [2\ \ -1\ \ 3]^T$.

Pivotação parcial

- Evitar pivô nulo.
- Evitar multiplicadores com valores grandes.
- Decomposição da forma

$$PA = LU.$$

- P: matriz de permutações.
- L: matriz triangular inferior unitária formada pelos multiplicadores, com sinais contrários.
- U: matriz triangular superior.
- Resolver o sistema $Ax = b$

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb.$$

$$\boxed{Ly = Pb \text{ e } Ux = y}.$$

Exemplo

- Resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

L	m	A			Operações	LP
1	$m_{11} = -(1)/4 = -0{,}25$	1	-3	2		1
2	$m_{21} = -(-2)/4 = 0{,}5$	-2	8	-1		2
3		$\underline{4}$	-6	5		$\underline{3}$
4	$m_{12} = -(-1{,}5)/5 = 0{,}3$	0	$-1{,}5$	0,75	$-0{,}25L_3 + L_1$	1
5		0	$\underline{5}$	1,5	$0{,}5L_3 + L_2$	$\underline{2}$
6		0	0	$\underline{1{,}2}$	$0{,}3L_5 + L_4$	$\underline{1}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{\underline{2}1} & 1 & 0 \\ -m_{\underline{1}1} & -m_{\underline{1}2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistema triangular inferior $Ly = Pb$

- Solução do sistema $Ly = Pb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -15 \\ 11 \end{bmatrix},$$

$y_1 = 29;$

$-0{,}5y_1 + y_2 = -15,\ y_2 = -15 + 0{,}5(29)$

$\leadsto y_2 = -0{,}5;$

$0{,}25y_1 - 0{,}3y_2 + y_3 = 11,$

$y_3 = 11 - 0{,}25(29) + 0{,}3(-0{,}5) \leadsto y_3 = 3{,}6.$

- Vetor intermediário: $y = [29\ \ -0{,}5\ \ 3{,}6]^T.$

Sistema triangular superior $Ux = y$

- Solução do sistema $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}6 \end{bmatrix},$$

$$1{,}2x_3 = 3{,}6, \; x_3 = \frac{3{,}6}{1{,}2} \leadsto x_3 = 3,$$

$$5x_2 + 1{,}5x_3 = -0{,}5; \; x_2 = \frac{-0{,}5 - 1{,}5(3)}{5}$$

$$\leadsto x_2 = -1;$$

$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 29;$$

$$x_1 = \frac{29 + 6(-1) - 5(3)}{4} \leadsto x_1 = 2.$$

- Vetor solução: $x = [2 \;\; -1 \;\; 3]^T$.

Cálculo do determinante

- Pelas propriedades dos determinantes

$$PA = LU \longrightarrow \det(PA) = \det(LU),$$

$$\det(A) = \frac{\det(L)\det(U)}{\det(P)},$$

$$\det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii} = 1, \quad \det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii},$$

$$\det(P) = (-1)^p,$$

- p: número de trocas de linhas necessárias para transformar a matriz de permutações em identidade.

- Determinante

$$\boxed{\det(A) = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} u_{ii}}.$$

Exemplo

- Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes U e P

$$U = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Valor de p

p	linhas pivotais			comentário
0	3	2	1	trocar 3 com 1
1	1	2	3	ordem crescente

- Determinante

$$\det(A) = (-1)^p \prod_{i=1}^{3} u_{ii} = (-1)^1(4)(5)(1{,}2)$$

$$\rightsquigarrow \det(A) = -24.$$

Exemplo

- Resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -7 \\ -40 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

L	m	A				Operações	LP
1	$m_{11} = -(4)/5 = -0{,}8$	4	-1	0	-1		1
2	$m_{21} = -(1)/5 = -0{,}2$	1	-2	1	0		2
3	$m_{31} = -(0)/5 = 0$	0	4	-4	1		3
4		$\underline{5}$	0	5	-10		$\underline{4}$
5	$m_{12} = -(-1)/4 = 0{,}25$	0	-1	-4	7	$-0{,}8L_4 + L_1$	1
6	$m_{22} = -(-2)/4 = 0{,}5$	0	-2	0	2	$-0{,}2L_4 + L_2$	2
7		0	$\underline{4}$	-4	1	$0L_4 + L_3$	$\underline{3}$
8		0	0	$\underline{-5}$	7,25	$0{,}25L_7 + L_5$	$\underline{1}$
9	$m_{23} = -(-2)/(-5) = -0{,}4$	0	0	-2	2,5	$0{,}5L_7 + L_6$	2
10		0	0	0	$\underline{-0{,}4}$	$-0{,}4L_8 + L_9$	$\underline{2}$

- Índices das linhas pivotais (LP): $\underline{4}$, $\underline{3}$, $\underline{1}$ e $\underline{2}$.
- Matrizes L, U e P

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistemas triangulares

❑ Solução do sistema $Ly = Pb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ -7 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\leadsto y = \begin{bmatrix} -40 \\ -7 \\ 36{,}25 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

❑ Solução do sistema $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ -7 \\ 36{,}25 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\leadsto x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Exatidão e unicidade da solução

❑ Exatidão

$$r = b - Ax = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -7 \\ -40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

❑ Unicidade da solução

p	linhas pivotais				comentário
0	4	3	1	2	trocar 4 com 1
1	1	3	4	2	trocar 3 com 2
2	1	2	4	3	trocar 4 com 3
3	1	2	3	4	ordem crescente

,

$$\det(A) = (-1)^p \prod_{i=1}^{4} u_{ii},$$

$$\det(A) = (-1)^3(5)(4)(-5)(-0{,}4) = -40 \neq 0.$$

Sistema com matriz singular

- Sistema com infinitas soluções.

- Resolver o sistema $Ax = b$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição LU

L	m	A			Operações	LP
1	$m_{11} = -(1)/(-2) = 0{,}5$	1	−3	2		1
2		$\underline{-2}$	8	−1		$\underline{2}$
3	$m_{31} = -(-1)/(-2) = -0{,}5$	−1	5	1		3
4		0	$\underline{1}$	1,5	$0{,}5L_2 + L_1$	$\underline{1}$
5	$m_{32} = -(1)/1 = -1$	0	1	1,5	$-0{,}5L_2 + L_3$	3
6		0	0	0	$-L_4 + L_5$	$\underline{3}$

- Os três fatores

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução dos sistemas triangulares

- Solução do sistema $Ly = Pb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 22 \\ 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução do sistema $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$0x_3 = 0 \rightsquigarrow x_3 = \theta,$$

$$x_2 + 1{,}5x_3 = 16 \rightsquigarrow x_2 = 16 - 1{,}5\theta,$$

$$-2x_1 + 8x_2 - x_3 = -12,$$

$$x_1 = \frac{-12 - 8(16 - 1{,}5\theta) + \theta}{-2} \rightsquigarrow x_1 = 70 - 6{,}5\theta.$$

- Vetor solução: $x = [70 - 6{,}5\theta \quad 16 - 1{,}5\theta \quad \theta]^T$.

Sistema com matriz singular

- Sistema sem solução.

- Resolver o sistema $Ax = c$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

- Solução de $Ly = Pc$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 80 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}.$$

- Solução de $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$0x_3 = 70 \longrightarrow \nexists\, x_3 \leadsto \nexists\, x.$$

Algoritmo: decomposição LU

```
Algoritmo Decomposição_LU
{ Objetivo: Fazer a decomposição LU de uma matriz A }
parâmetros de entrada n, A { ordem e matriz }
parâmetros de saída A, Det, Pivot
  { matriz decomposta A = U + L − I, determinante, pivôs }
  para i ← 1 até n faça  Pivot(i) ← i fim para; Det ← 1
  para j ← 1 até n − 1 faça
    { Escolha do elemento pivô }
    p ← j; Amax ← abs(A(j,j))
    para k ← j + 1 até n faça
      se abs(A(k,j)) > Amax então
        Amax ← abs(A(k,j)); p ← k
      fim se
    fim para
    se p ≠ j então
    { Troca de linhas }
      para k ← 1 até n faça
        t ← A(j,k); A(j,k) ← A(p,k); A(p,k) ← t
      fim para
      t ← Pivot(j); Pivot(j) ← Pivot(p); Pivot(p) ← t
      Det ← −Det
    fim se
    Det ← Det ∗ A(j,j)
    se abs(A(j,j)) ≠ 0 então
    { Eliminação de Gauss }
      r ← 1/A(j,j)
      para i ← j + 1 até n faça
        m ← A(i,j) ∗ r; A(i,j) ← m
        para k ← j + 1 até n faça
          A(i,k) ← A(i,k) − m ∗ A(j,k)
        fim para
      fim para
    fim se
  fim para
  Det ← Det ∗ A(n,n)
fim algoritmo
```

Complexidade da decomposição LU

- Matriz de ordem n

Operações	Complexidade
Adições	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
Multiplicações	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$
Divisões	$n - 1$

- Desconsideradas operações de trocas de sinal e multiplicações para o cálculo do determinante.

Algoritmo: Substituições sucessivas pivotal

```
Algoritmo Substituições_Sucessivas_Pivotal
{ Objetivo: Resolver sistema triang. inferior }
  { Lx = Pc pelas substituições sucessivas, }
  {  com pivotação parcial }
parâmetros de entrada n, L, c, Pivot
  { ordem, matriz triangular inferior unitária, }
  { vetor independente e posição dos pivôs }
parâmetros de saída x
  { solução do sistema triangular inferior }
  k ← Pivot(1)
  x(1) ← c(k)
  para i ← 2 até n faça
    Soma ← 0
    para j ← 1 até i − 1 faça
      Soma ← Soma + L(i,j) ∗ x(j)
    fim para
    k ← Pivot(i)
    x(i) ← c(k) − Soma
  fim para
fim algoritmo
```

Decomposição de Cholesky

- Matriz dos coeficientes A simétrica e definida positiva,

  $A = A^T$ e $v^T Av > 0, \; \forall \; v \neq 0.$

- Decomposição LU simplificada para

  $A = LL^T,$

- L: matriz triangular inferior.

- L^T: matriz triangular superior.

- **Teorema (Cholesky)**
  Se A for uma matriz simétrica e definida positiva, então existe uma única matriz triangular L com elementos da diagonal positivos tal que $A = LL^T$.

Cálculo do fator

- Decomposição $LL^T = A$ de matriz de ordem 4

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento l_{44} da diagonal

$$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = a_{44} \longrightarrow$$

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)}$$

$$\rightsquigarrow l_{44} = \sqrt{a_{44} - \sum_{k=1}^{3} l_{4k}^2}.$$

- Elemento qualquer da diagonal de L

$$\boxed{l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \ j = 1, 2, \ldots, n.}$$

Cálculo do fator cont.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento l_{43} abaixo da diagonal

$$l_{41}l_{31}+l_{42}l_{32}+l_{43}l_{33}=a_{43}\longrightarrow$$

$$l_{43}=\frac{a_{43}-(l_{41}l_{31}+l_{42}l_{32})}{l_{33}}$$

$$\rightsquigarrow l_{43}=\frac{a_{43}-\displaystyle\sum_{k=1}^{2}l_{4k}l_{3k}}{l_{33}}.$$

- Elemento genérico abaixo da diagonal principal

$$\boxed{l_{ij}=\frac{a_{ij}-\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}},\quad \begin{array}{l} j=1,2,\ldots,n-1 \text{ e} \\ i=j+1,j+2,\ldots,n. \end{array}}$$

Solução de $Ax = b$ por Cholesky

- Solução de $Ax = b$

$$Ax = b \longrightarrow LL^T x = b.$$

$$\boxed{Ly = b \text{ e } L^T x = y}$$

- Sistema triangular inferior $Ly = b$

$$\boxed{y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j}{l_{ii}}, \; i = 1, 2, \ldots, n.}$$

- Sistema triangular superior $L^T x = y$

$$\boxed{x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j}{l_{ii}}, \; i = n, n-1, \ldots, 1.}$$

Cálculo do determinante

- Pelas propriedades dos determinantes

$$\det(A) = \det(LL^T),$$

$$\det(A) = \det(L)\det(L^T) \longrightarrow$$

$$\boxed{\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right)^2}.$$

Exemplo

- Resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 1

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2,\ l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1.$$

- Coluna 2

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{10 - (-1)^2} = 3,$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{-7 - (1)(-1)}{3} = -2.$$

- Coluna 3

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{30 - ((1)^2 + (-2)^2)} = 5.$$

Dispositivo prático

A				L			
i\j	1	2	3	i\j	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1	3	
3	2	-7	30	3	1	-2	5

.

- Verificação que $LL^T = A$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}.$$

- Sistema $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- Sistema $L^T x = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \leadsto x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Exatidão e unicidade da solução

- Exatidão

$$r = b - Ax,$$

$$r = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$r = 0 \longrightarrow$ solução exata.

- Unicidade

$$\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{3} l_{ii} \right)^2 = ((2)(3)(5))^2 = 900,$$

$\det(A) \neq 0 \longrightarrow$ solução única.

Exemplo

- Resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 1

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3,\ l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{-3}{3} = -1,\ l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1.$$

- Coluna 2

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{20 - (2)^2} = 4,$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{2 - (-1)(2)}{4} = 1,$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}l_{21}}{l_{22}} = \frac{22 - (1)(2)}{4} = 5.$$

- Coluna 3

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{6 - ((-1)^2 + (1)^2)} = 2,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}} = \frac{2 - ((1)(-1) + (5)(1))}{2} = -1.$$

- Coluna 4

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)} = \sqrt{28 - ((1)^2 + (5)^2 + (-1)^2)} = 1.$$

Dispositivo prático

A					L				
i\j	1	2	3	4	i\j	1	2	3	4
1	9				1	3			
2	6	20			2	2	4		
3	−3	2	6		3	−1	1	2	
4	3	22	2	28	4	1	5	−1	1

.

- Sistema $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- Sistema $L^T x = y$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Exatidão e unicidade da solução

- Exatidão

$$r = b - Ax,$$

$$r = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$r = 0 \longrightarrow$ solução exata.

- Matriz L

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Unicidade

$$\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{4} l_{ii} \right)^2 = ((3)(4)(2)(1))^2 = 576,$$

$\det(A) \neq 0 \longrightarrow$ solução única.

Algoritmo: decomposição de Cholesky

```
Algoritmo Cholesky
{ Objetivo: Fazer a decomposição LL^T de uma matriz A }
  { simétrica e definida positiva }
parâmetros de entrada n, A  { ordem e matriz a ser decomposta }
parâmetros de saída L, Det, Erro
  { fator, determinante e condição de erro }
  Det ← 1
  para j ← 1 até n faça
    Soma ← 0
    para k ← 1 até j − 1 faça
      Soma ← Soma + L(j, k)^2
    fim para
    t ← A(j, j) − Soma; Det ← Det ∗ t
    Erro ← t ≤ 0
    { variável lógica: se verdadeiro tem erro e se falso não tem }
    se Erro então
      escreva "a matriz não é definida positiva"; abandone
    senão
      L(j, j) ← raiz2(t); r ← 1/L(j, j)
    fim se
    para i ← j + 1 até n faça
      Soma ← 0
      para k ← 1 até j − 1 faça
        Soma ← Soma + L(i, k) ∗ L(j, k)
      fim para
      L(i, j) ← (A(i, j) − Soma) ∗ r
    fim para
  fim para
fim algoritmo
```

Complexidade: decomposição de Cholesky

- Matriz de ordem n

Operações	Complexidade
Adições	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$
Multiplicações	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{3}n$
Divisões	n
Raízes quadradas	n

- Desconsideradas as multiplicações para cálculo do determinante.

Decomposição espectral

- Uma matriz A de ordem n possui autovalores λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Cada autovalor tem um autovetor correspondente.
- Generalizando a relação $Av = \lambda v$

$$Av_i = \lambda_i v_i, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$AV = V\Lambda.$$

- $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: matriz diagonal contendo os autovalores λ_i.
- V: matriz, cujas colunas são os autovetores v_i.
- Pós-multiplicando por V^{-1}

$$AVV^{-1} = V\Lambda V^{-1} \longrightarrow \boxed{A = V\Lambda V^{-1}}.$$

- Matriz A decomposta em termos de seus autovalores e autovetores.

Cálculo dos autovetores

- Da relação fundamental $Av_i = \lambda_i v_i$

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0.$$

- Matriz $(A - \lambda_i I)$ é singular

$$\det(A - \lambda_i I) = 0.$$

- Sistema $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ é homogêneo.
- Ele apresenta infinitas soluções v_i.
- Atribuir valor arbitrário a um elemento de v_i.
- Por exemplo, $v_{i1} = 1$.
- Obter os demais elementos do autovetor v_i pela solução do sistema resultante de ordem $n - 1$.

Exemplo de decomposição espectral

- Fazer a decomposição espectral da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Polinômio característico

$$D_3(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 7-\lambda & 14 & -2 \\ -3 & -10-\lambda & 2 \\ -12 & -28 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right).$$

- Desenvolvendo o determinante

$$D_3(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12.$$

- Os três zeros do polinômio característico são os três autovalores de A

$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_3 = -3.$$

- Matriz Λ contendo os autovalores

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Autovetor v de $\lambda_1 = 4$

- Matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}$.
- Sistema homogêneo $(A - \lambda_1 I)v = (A - 4I)v = 0$.
- Autovetor v correspondente à $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 & -2 \\ -3 & -14 & 2 \\ -12 & -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Equações 1 e 2 são redundantes.
- Elimina-se a segunda e faz-se $v_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\to v_2 = -0{,}5;\ v_3 = -2 \longrightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Autovetor w de $\lambda_2 = 1$

- Matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}$.

- Sistema homogêneo $(A - \lambda_2 I)w = (A - I)w = 0$.

- Autovetor w correspondente à $\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ -3 & -11 & 2 \\ -12 & -28 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Equações 1 e 3 redundantes.

- Elimina-se a terceira e faz-se $w_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -11 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow w_2 = -1,\ w_3 = -4 \longrightarrow w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Autovetor z de $\lambda_3 = -3$

- Matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}$.
- Sistema homogêneo $(A - \lambda_3 I)z = (A + 3I)z = 0$.
- Autovetor z correspondente à $\lambda_3 = -3$

$$\begin{bmatrix} 10 & 14 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \\ -12 & -28 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Equações 2 e 3 redundantes.
- Elimina-se a terceira e faz-se $z_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\to z_2 = -1,\ z_3 = -2 \longrightarrow z = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Decomposição espectral de A

- Matriz V contendo os autovetores de A

$$V = [v\ w\ z] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

- Inversa de V

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição espectral $A = V\Lambda V^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Solução de sistema

- Solução de $Ax = b$ obtida por $x = A^{-1}b$.

$$x = (V\Lambda V^{-1})^{-1}b$$

$$\leadsto \boxed{x = (V\Lambda^{-1}V^{-1})b}.$$

- Vetor solução x depende de λ_i^{-1}.
- Quase singularidade da matriz A.
- Solução x tem elementos muito grandes.

Exemplo

- Calcular a solução do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Sabendo que

$$x = (V\Lambda^{-1}V^{-1})b,$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix},$$

$$\leadsto x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata

$$r = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Grande custo computacional.

- Normalmente, não é utilizada para a solução de sistemas de equações lineares.

Uso da decomposição

- Resolver sistemas de equações lineares.
- Calcular o determinante de uma matriz.
- Refinamento da solução de sistemas.
- Cálculo da matriz inversa.

Refinamento da solução

- x^0: solução aproximada de $Ax = b$ calculada por decomposição LU com pivotação parcial
  $LUx^0 = Pb \longrightarrow Lt = Pb$ e $Ux^0 = t$.
- Fatores L e U perdem exatidão.
- Solução melhorada $x^1 = x^0 + c^0$,
- c^0: vetor de correção
  $Ax^1 = b \longrightarrow A(x^0 + c^0) = b \longrightarrow Ac^0 = b - Ax^0$
  $\leadsto Ac^0 = r^0$.
- Parcela de correção c^0 é a solução do sistema
  $LUc^0 = Pr^0 \longrightarrow Lt = Pr^0$ e $Uc^0 = t$.
- Melhor aproximação $x^2 = x^1 + c^1$,
- c^1: solução de $Ac^1 = r^1$ obtida por $LUc^1 = Pr^1$.
- Esquematicamente

$$\boxed{\begin{array}{l} LUx^0 = Pb \rightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t, \\ \left.\begin{array}{l} r^k = b - Ax^k \\ LUc^k = Pr^k \rightarrow Lt = Pr^k \text{ e } Uc^k = t \\ x^{k+1} = x^k + c^k \end{array}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}}$$

Exemplo

- Resolver o sistema e refinar a solução até que $\|c\|_\infty < 10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição LU com pivotação parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}67 & 1 & 0 \\ -0{,}33 & 0{,}42 & 1 \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6{,}33 & 3 \\ 0 & 0 & 2{,}74 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Cálculo de x^0

$$Ax^0 = b \longrightarrow LUx^0 = Pb,$$

$$Lt = Pb \leadsto t = \begin{bmatrix} 19 \\ 8{,}73 \\ 13{,}6034 \end{bmatrix} \text{ e } Ux^0 = t \leadsto x^0 = \begin{bmatrix} 1{,}9731 \\ -0{,}9738 \\ 4{,}9647 \end{bmatrix}.$$

Refinamento da solução

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1{,}9731 \\ -0{,}9738 \\ 4{,}9647 \end{bmatrix},$$

$$r^0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} -0{,}0601 \\ 0 \\ 0{,}0712 \end{bmatrix}, LUc^0 = Pr^0 \leadsto c^0 = \begin{bmatrix} 0{,}0268 \\ -0{,}0262 \\ 0{,}0352 \end{bmatrix},$$

$$x^1 = x^0 + c^0 = \begin{bmatrix} 1{,}9999 \\ -1{,}0000 \\ 4{,}9999 \end{bmatrix},$$

$$r^1 = b - Ax^1 = \begin{bmatrix} 0{,}0001 \\ 0 \\ 0{,}0002 \end{bmatrix}, LUc^1 = Pr^1 \leadsto c^1 = \begin{bmatrix} 0{,}0001 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0001 \end{bmatrix},$$

$$x^2 = x^1 + c^1 = \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix}.$$

- Final do refinamento: $\|c^1\|_\infty = 0{,}0001 < 10^{-3}$.

Cálculo da matriz inversa

- Matriz inversa satisfaz

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- $V = A^{-1}$: usado para simplificar a notação.
- Cálculo de V pela solução dos n sistemas

$$Av_i = e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

- v_i: i-ésima coluna da matriz inversa.
- e_i: i-ésima coluna da matriz identidade.
- Mesma matriz A dos coeficientes.

Exemplo

- Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 30 \end{bmatrix}.$$

- A é simétrica.

- Decomposição de Cholesky

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 1

$$LL^T v_1 = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_1 \leadsto t = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix},$$

$$L^T v_1 = t \leadsto v_1 = \begin{bmatrix} 2{,}75 \\ 1{,}70 \\ 0{,}10 \end{bmatrix}.$$

Cálculo das colunas de A^{-1}

- Coluna 2

$$LL^T v_2 = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_2 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix},$$

$$L^T v_2 = t \rightsquigarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1{,}70 \\ 1{,}16 \\ 0{,}08 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 3

$$LL^T v_3 = e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_3 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix},$$

$$L^T v_3 = t \rightsquigarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}08 \\ 0{,}04 \end{bmatrix}.$$

- Matriz inversa $A^{-1} = V = [v_1\ v_2\ v_3]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}75 & 1{,}70 & 0{,}10 \\ 1{,}70 & 1{,}16 & 0{,}08 \\ 0{,}10 & 0{,}08 & 0{,}04 \end{bmatrix}.$$

Métodos iterativos estacionários

- Gerar, a partir de x^0, uma seqüência de vetores $\{x^1, x^2, x^3, \ldots, x^k, \ldots\} \longrightarrow x$.

- Uma série de operações é repetida várias vezes.

- Seja M a matriz de iteração e c um vetor constante

$$\boxed{x^{k+1} = Mx^k + c}.$$

- Método iterativo é dito estacionário quando a matriz M for fixa.

- Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

Condição de convergência

- **Teorema (Condição necessária)**
  O método iterativo $x^{k+1} = Mx^k + c$ converge com qualquer valor inicial x^0 se, e somente se, $\rho(M) < 1$, sendo $\rho(M)$ o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração M.

- **Teorema (Condição suficiente)**
  É condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A seja diagonal estritamente dominante, ou seja,

$$\boxed{|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ i = 1, 2, \ldots, n.}$$

- Convergência não depende da escolha de x^0.

Critério de parada

- Solução exata de método iterativo

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x.$$

- Critérios de parada

$$\boxed{\frac{||x^k - x^{k-1}||}{||x^k||} \le \varepsilon} \text{ ou } \boxed{k \ge k_{\text{max}}},$$

- ε: tolerância,
- k_{max}: número máximo de iterações.
- Adotando-se a norma-∞

$$\boxed{\frac{\max\limits_{1\le i\le n} \left|x_i^k - x_i^{k-1}\right|}{\max\limits_{1\le i\le n} \left|x_i^k\right|} \le \varepsilon},$$

- x_i^k: i-ésimo componente do vetor x^k obtido na k-ésima iteração.

Método de Jacobi

- Decompor a matriz A, tal que

$$A = D - E - F,$$

- D: matriz diagonal e E e F: matrizes triangulares inferior e superior com diagonais nulas.

- Sistema linear $Ax = b$ escrito na forma

$$(D - E - F)x = b \longrightarrow Dx = (E + F)x + b.$$

- Igualdade convertida em processo iterativo

$$x^{k+1} = \left(D^{-1}(E + F)\right)x^k + D^{-1}b \longrightarrow$$

$$\boxed{x^{k+1} = Jx^k + c}.$$

- Matriz de iteração do método de Jacobi

$$J = D^{-1}(E + F).$$

Forma análoga de dedução

- Sistema linear na forma

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n.
\end{array}
$$

- Explicitar x_i na i-ésima equação.
- Equações de iterações do método de Jacobi

$$
\left.
\begin{array}{l}
x_1^{k+1} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1\right), \\[2ex]
x_2^{k+1} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2\right), \\[2ex]
x_3^{k+1} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3\right), \\[2ex]
\vdots \\[2ex]
x_n^{k+1} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k + b_n\right)
\end{array}
\right\}.
$$

Forma matricial

- Forma de recorrência $x^{k+1} = Jx^k + c$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix}}_{x^{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}}_{x^k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}}_{c}.$$

- Convergência independe do vetor inicial x^0.

- Vetor inicial

$$\boxed{x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}}.$$

Algoritmo: método de Jacobi

```
Algoritmo Jacobi
{ Objetivo: Resolver sistema Ax = b pelo método de Jacobi }
parâmetros de entrada n, A, b, Toler, IterMax
  { ordem, matriz, vetor independente, }
  { tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída x, Iter, Erro
  { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
  { Construção das matrizes para as iterações }
  para i ← 1 até n faça
    r ← 1/A(i, i)
    para j ← 1 até n faça
      se i ≠ j então  A(i,j) ← A(i,j) ∗ r  fim se
    fim para
    b(i) ← b(i) ∗ r; x(i) ← b(i)
  fim para; Iter ← 0
  { Iterações de Jacobi }
  repita
    Iter ← Iter + 1
    para i ← 1 até n faça
      Soma ← 0
      para j ← 1 até n faça
        se i ≠ j então  Soma ← Soma + A(i,j) ∗ x(j)  fim se
      fim para
      v(i) ← b(i) − Soma
    fim para
    Norma1 ← 0; Norma2 ← 0
    para i ← 1 até n faça
      se abs(v(i) − x(i)) > Norma1 então
        Norma1 ← abs(v(i) − x(i))
      fim se
      se abs(v(i)) > Norma2 então  Norma2 ← abs(v(i))  fim se
      x(i) ← v(i)
    fim para
    DifMax ← Norma1/Norma2
    escreva Iter, x, DifMax
    { Teste de convergência }
    se DifMax < Toler ou Iter ≥ IterMax então  interrompa  fim se
  fim repita
  Erro ← DifMax ≥ Toler
  { variável lógica: se verdadeiro há erro e se falso não há erro }
fim algoritmo
```

Exemplo

- Resolver o sistema de equações pelo método de Jacobi com $\varepsilon < 10^{-5}$ e $k_{\max} = 50$

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- Matriz diagonal estritamente dominante

$|10| > |3| + |-2|$, $|8| > |2| + |-1|$ e $|5| > |1| + |1|$.

- Equações de iterações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{10}\left(-3x_2^k + 2x_3^k + 57\right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8}\left(-2x_1^k + x_3^k + 20\right),$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5}\left(-x_1^k - x_2^k - 4\right).$$

- Vetor inicial: $x^0 = [5{,}7 \;\; 2{,}5 \;\; -0{,}8]^T$.

Coordenadas do vetor da primeira iteração

$x_1^1 = \frac{1}{10}\left(-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57\right),$

$x_1^1 = \frac{1}{10}(-3(2{,}5) + 2(-0{,}8) + 57) \leadsto x_1^1 = 4{,}79;$

$x_2^1 = \frac{1}{8}\left(-2x_1^0 + x_3^0 + 20\right),$

$x_2^1 = \frac{1}{8}(-2(5{,}7) + (-0{,}8) + 20) \leadsto x_2^1 = 0{,}975;$

$x_3^1 = \frac{1}{5}\left(-x_1^0 - x_2^0 - 4\right),$

$x_3^1 = \frac{1}{5}(-(5{,}7) - (2{,}5) - 4) \leadsto x_3^1 = -2{,}44.$

- $x^1 = [4{,}79 \;\; 0{,}975 \;\; -2{,}44]^T.$
- Critério de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|4{,}79 - 5{,}7|, |0{,}975 - 2{,}5|, |-2{,}44 - (-0{,}8)|)}{\max(|4{,}79|, |0{,}975|, |-2{,}44|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}91;\; 1{,}525;\; 1{,}64)}{\max(4{,}79;\; 0{,}975;\; 2{,}44)} = 0{,}3424.$$

Resultados obtidos pelo algoritmo

Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi

k	x1	x2	x3	Epsilon
0	5.70000	2.50000	-0.80000	
1	4.79000	0.97500	-2.44000	3.42380e-01
2	4.91950	0.99750	-1.95300	9.89938e-02
3	5.01015	1.02600	-1.98340	1.80933e-02
4	4.99552	0.99954	-2.00723	5.29725e-03
5	4.99869	1.00022	-1.99901	1.64413e-03
6	5.00013	1.00045	-1.99978	2.88007e-04
7	4.99991	0.99999	-2.00012	9.12629e-05
8	4.99998	1.00001	-1.99998	2.72243e-05
9	5.00000	1.00001	-2.00000	4.59167e-06

- Vetor solução

$$x \approx x^9 = [5{,}00000 \;\; 1{,}00001 \;\; -2{,}00000]^T.$$

Exemplo

- Resolver o sistema pelo método de Jacobi com $\varepsilon < 10^{-3}$ e $k_{\text{max}} = 50$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz diagonalmente dominante

$|5| > |2| + |0| + |-1|$, $|8| > |1| + |-3| + |2|$,
$|6| > |0| + |1| + |1|$ e $|9| > |1| + |-1| + |2|$.

- Equações de iterações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{5}\left(-2x_2^k + x_4^k + 6\right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8}\left(-x_1^k + 3x_3^k - 2x_4^k + 10\right),$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{6}\left(-x_2^k - x_4^k - 5\right),$$

$$x_4^{k+1} = \frac{1}{9}\left(-x_1^k + x_2^k - 2x_3^k\right).$$

- Vetor inicial: $x^0 = [1{,}2 \;\; 1{,}25 \;\; -0{,}8333 \;\; 0]^T$.

Coordenadas do vetor da primeira iteração

$$x_1^1 = \frac{1}{5}(-2x_2^0 + x_4^0 + 6) = \frac{1}{5}(-2(1{,}25) + (0) + 6),$$

$$= 0{,}7;$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8}(-x_1^0 + 3x_3^0 - 2x_4^0 + 10),$$

$$= \frac{1}{8}(-(1{,}2) + 3(-0{,}8333) - 2(0) + 10) = 0{,}7875;$$

$$x_3^1 = \frac{1}{6}(-x_2^0 - x_4^0 - 5) = \frac{1}{6}(-(1{,}25) - (0) - 5),$$

$$= -1{,}0417;$$

$$x_4^1 = \frac{1}{9}(-x_1^0 + x_2^0 - 2x_3^0),$$

$$= \frac{1}{9}(-(1{,}2) + (1{,}25) - 2(-0{,}8333)) = 0{,}1907.$$

- $x^1 = [0{,}7 \;\; 0{,}7875 \;\; -1{,}0417 \;\; 0{,}1907]^T$.
- Critério de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} =$$

$$\frac{\max(|0{,}7-1{,}2|, |0{,}7875-1{,}25|, |-1{,}0417-(-0{,}8333)|, |0{,}1907-0|)}{\max(|0{,}7|, |0{,}7875|, |-1{,}0417|, |0{,}1907|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}5;\ 0{,}4625;\ 0{,}2084;\ 0{,}1907)}{\max(0{,}7;\ 0{,}7875;\ 1{,}0417;\ 0{,}1907)} = 0{,}4800.$$

Resultados obtidos pelo algoritmo

Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi

k	x1	x2	x3	x4	Epsilon
0	1.20000	1.25000	-0.83333	0.00000	
1	0.70000	0.78750	-1.04167	0.19074	4.80000e-01
2	0.92315	0.72419	-0.99637	0.24120	2.23960e-01
3	0.95856	0.70067	-0.99423	0.19931	4.21369e-02
4	0.95960	0.70751	-0.98333	0.19229	1.10879e-02
5	0.95545	0.71323	-0.98330	0.19051	5.81305e-03
6	0.95281	0.71420	-0.98396	0.19160	2.68474e-03
7	0.95264	0.71402	-0.98430	0.19215	5.56291e-04

- Vetor solução

$$x \approx x^7 = \begin{bmatrix} 0{,}95264 \\ 0{,}71402 \\ -0{,}98430 \\ 0{,}19215 \end{bmatrix}.$$

Método de Gauss-Seidel

- Decompor a matriz A, tal que

$$A = D - E - F,$$

- D: matriz diagonal e E e F matrizes triangulares inferior e superior com diagonais nulas.

- Sistema linear $Ax = b$ escrito na forma

$$(D - E - F)x = b \longrightarrow (D - E)x = Fx + b.$$

- Forma de iteração

$$x^{k+1} = \left((D - E)^{-1}F\right)x^k + (D - E)^{-1}b \longrightarrow$$

$$\boxed{x^{k+1} = Sx^k + d}.$$

- Matriz de iteração do método de Gauss-Seidel

$$S = (D - E)^{-1}F.$$

Forma análoga de dedução

- Sistema linear na forma

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad &\;\vdots \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}
$$

- Explicitar x_i na i-ésima equação.
- Equações de iterações de Gauss-Seidel

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1), \\
x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2\right), \\
x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3\right), \\
&\vdots \\
x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n\right)
\end{aligned}
\right\}.
$$

- Mesmo vetor inicial de Jacobi: $\boxed{x_i^0 = \dfrac{b_i}{a_{ii}}}$.

Algoritmo: método de Gauss-Seidel

```
Algoritmo Gauss-Seidel
{ Objetivo: Resolver o sistema Ax = b pelo método iterativo de }
  { Gauss-Seidel }
parâmetros de entrada n, A, b, Toler, IterMax
  { ordem, matriz, vetor independente, }
  { tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída x, Iter, Erro
  { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
  { Construção das matrizes para as iterações }
  para i ← 1 até n faça
    r ← 1/A(i,i)
    para j ← 1 até n faça
      se i ≠ j então  A(i,j) ← A(i,j) ∗ r  fim se
    fim para
    b(i) ← b(i) ∗ r; x(i) ← b(i)
  fim para; Iter ← 0
  { Iterações de Gauss-Seidel }
  repita
    Iter ← Iter + 1
    para i ← 1 até n faça
      Soma ← 0
      para j ← 1 até n faça
        se i ≠ j então  Soma ← Soma + A(i,j) ∗ x(j)  fim se
      fim para
      v(i) ← x(i); x(i) ← b(i) − Soma
    fim para
    Norma1 ← 0; Norma2 ← 0
    para i ← 1 até n faça
      se abs(x(i) − v(i)) > Norma1 então
        Norma1 ← abs(x(i) − v(i))
      fim se
      se abs(x(i)) > Norma2 então  Norma2 ← abs(x(i))  fim se
    fim para
    DifMax ← Norma1/Norma2
    escreva Iter, x, DifMax
    { Teste de convergência }
    se DifMax < Toler ou Iter ≥ IterMax então  interrompa  fim se
  fim repita
  Erro ← DifMax ≥ Toler
  { variável lógica: se verdadeiro há erro e se falso não há erro }
fim algoritmo
```

Exemplo

- Resolver o sistema pelo método de Gauss-Seidel com $\varepsilon < 10^{-5}$ e $k_{\max} = 50$

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- Matriz diagonal estritamente dominante

$$|10| > |3| + |-2|, \ |8| > |2| + |-1| \text{ e } |5| > |1| + |1|.$$

- Equações de iterações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{10}\left(-3x_2^k + 2x_3^k + 57\right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8}\left(-2x_1^{k+1} + x_3^k + 20\right),$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5}\left(-x_1^{k+1} - x_2^{k+1} - 4\right).$$

- Vetor inicial

$$x^0 = [5{,}7 \ \ 2{,}5 \ \ -0{,}8]^T.$$

Coordenadas do vetor da primeira iteração

$$x_1^1 = \frac{1}{10}\left(-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57\right),$$

$$x_1^1 = \frac{1}{10}(-3(2{,}5) + 2(-0{,}8) + 57) \leadsto x_1^1 = 4{,}79;$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8}\left(-2x_1^1 + x_3^0 + 20\right),$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8}(-2(4{,}79) + (-0{,}8) + 20) \leadsto x_2^1 = 1{,}2025;$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}\left(-x_1^1 - x_2^1 - 4\right),$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}(-(4{,}79) - (1{,}2025) - 4) \leadsto x_3^1 = -1{,}9985.$$

- $x^1 = [4{,}79 \;\; 1{,}2025 \;\; -1{,}9985]^T$.
- Critério de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} =$$

$$\frac{\max(|4{,}79 - 5{,}7|, |1{,}2025 - 2{,}5|, |-1{,}9985 - (-0{,}8)|)}{\max(|4{,}79|, |1{,}2025|, |-1{,}9985|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}91;\ 1{,}2975;\ 1{,}1985)}{\max(4{,}79;\ 1{,}2025;\ 1{,}9985)} = 0{,}2709.$$

Resultados obtidos pelo algoritmo

```
Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel
  k       x1          x2          x3        Epsilon
  0     5.70000     2.50000    -0.80000
  1     4.79000     1.20250    -1.99850   2.70877e-01
  2     4.93955     1.01530    -1.99097   3.78982e-02
  3     4.99722     1.00182    -1.99981   1.15396e-02
  4     4.99949     1.00015    -1.99993   4.55035e-04
  5     4.99997     1.00002    -2.00000   9.55994e-05
  6     5.00000     1.00000    -2.00000   5.32440e-06
```

- Vetor solução

$$x \approx x^6 = [5{,}00000\ 1{,}00000\ \ -2{,}00000]^T.$$

Exemplo

- Resolver o sistema pelo método de Gauss-Seidel com $\varepsilon < 10^{-3}$ e $k_{\text{max}} = 50$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz diagonal estritamente dominante

$|5| > |2| + |0| + |-1|$, $|8| > |1| + |-3| + |2|$,
$|6| > |0| + |1| + |1|$ e $|9| > |1| + |-1| + |2|$.

- Equações de iterações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{5}\left(-2x_2^k + x_4^k + 6\right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8}\left(-x_1^{k+1} + 3x_3^k - 2x_4^k + 10\right),$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{6}\left(-x_2^{k+1} - x_4^k - 5\right),$$

$$x_4^{k+1} = \frac{1}{9}\left(-x_1^{k+1} + x_2^{k+1} - 2x_3^{k+1}\right).$$

- Vetor inicial: $x^0 = [1{,}2 \;\; 1{,}25 \;\; -0{,}8333 \;\; 0]^T$.

Coordenadas do vetor da primeira iteração

$$x_1^1 = \frac{1}{5}\left(-2x_2^0 + x_4^0 + 6\right) = \frac{1}{5}(-2(1{,}25) + (0) + 6),$$
$$= 0{,}7;$$
$$x_2^1 = \frac{1}{8}\left(-x_1^1 + 3x_3^0 - 2x_4^0 + 10\right),$$
$$= \frac{1}{8}(-(0{,}7) + 3(-0{,}8333) - 2(0) + 10) = 0{,}85;$$
$$x_3^1 = \frac{1}{6}\left(-x_2^1 - x_4^0 - 5\right) = \frac{1}{6}(-(0{,}85) - (0) - 5),$$
$$= -0{,}975;$$
$$x_4^1 = \frac{1}{9}\left(-x_1^1 + x_2^1 - 2x_3^1\right),$$
$$= \frac{1}{9}(-(0{,}7) + (0{,}85) - 2(-0{,}975)) = 0{,}2333.$$

- $x^1 = [0{,}7 \;\; 0{,}85 \;\; -0{,}975 \;\; 0{,}2333]^T$.
- Critério de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|0{,}7-1{,}2|, |0{,}85-1{,}25|, |-0{,}975-(-0{,}8333)|, |0{,}2333-0|)}{\max(|0{,}7|, |0{,}85|, |-0{,}975|, |0{,}2333|)},$$
$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}1417;\ 0{,}2333)}{\max(0{,}7;\ 0{,}85;\ 0{,}975;\ 0{,}2333)} = 0{,}5128.$$

Resultados obtidos pelo algoritmo

Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel

k	x1	x2	x3	x4	Epsilon
0	1.20000	1.25000	-0.83333	0.00000	
1	0.70000	0.85000	-0.97500	0.23333	5.12821e-01
2	0.90667	0.71271	-0.99101	0.19867	2.08542e-01
3	0.95465	0.70937	-0.98467	0.19156	4.87314e-02
4	0.95456	0.71354	-0.98418	0.19193	4.22999e-03
5	0.95297	0.71383	-0.98429	0.19216	1.61801e-03
6	0.95290	0.71374	-0.98432	0.19216	9.20739e-05

- Vetor solução

$$x \approx x^6 = \begin{bmatrix} 0{,}95290 \\ 0{,}71374 \\ -0{,}98432 \\ 0{,}19216 \end{bmatrix}.$$

Análise de convergência

- Erro ϵ^k na k-ésima iteração

$$\epsilon^k = x^k - x,$$

- x: solução exata e x^k: solução aproximada.
- Para ϵ^{k+1}

$$\epsilon^{k+1} = x^{k+1} - x = (Mx^k + c) - x,$$

$$\epsilon^{k+1} = M(\epsilon^k + x) + c - x,$$

$$\epsilon^{k+1} = M\epsilon^k + (Mx + c - x).$$

- Tomando o limite

$$\lim_{k\to\infty} x^{k+1} = \lim_{k\to\infty} Mx^k + c \longrightarrow x = Mx + c.$$

- Propagação de erro na forma

$$\epsilon^{k+1} = M\epsilon^k.$$

Análise de convergência cont.

- Matriz de iteração M

$$Mv_i = \mu_i v_i.$$

- Erro inicial ϵ^0

$$\epsilon^0 = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i,$$

$$\epsilon^1 = M\epsilon^0 = \sum_{i=1}^{n} c_i M v_i \longrightarrow \epsilon^1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i v_i.$$

- Similarmente

$$\epsilon^2 = M\epsilon^1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i M v_i \longrightarrow \epsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i^2 v_i.$$

- Na k-ésima iteração: $\boxed{\epsilon^k = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i^k v_i}$.

- $\|\epsilon^k\| \rightarrow 0$ se, e somente se, $|\mu_i| < 1$.

- Taxa de convergência controlada por $\rho(M)$.

Comparação dos métodos iterativos

- Seja $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{bmatrix}.$$

- Matriz A não é diagonalmente dominante.

- Matrizes de iteração

$$J = D^{-1}(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ -1 & 0 & -1 \\ -0{,}4 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} \leadsto$$

$$\rho(J) = 1{,}1200;$$

$$S = (D - E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ 0 & 1{,}2 & -0{,}4 \\ 0 & 0{,}96 & 0{,}08 \end{bmatrix} \leadsto$$

$$\rho(S) = 0{,}6928.$$

- Raios espectrais: $\rho(J) > 1$ e $\rho(S) < 1$.

Comparação dos métodos iterativos

- Seja $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{bmatrix}.$$

- Matriz A não é diagonalmente dominante.

- Matrizes de iteração

$$J = D^{-1}(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0{,}4 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$\rho(J) = 0{,}8266$;

$$S = (D - E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ 0 & -1{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$\rho(S) = 1{,}2000$.

- Raios espectrais: $\rho(J) < 1$ e $\rho(S) > 1$.

Malcondicionamento

- Sistema linear $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix},$$

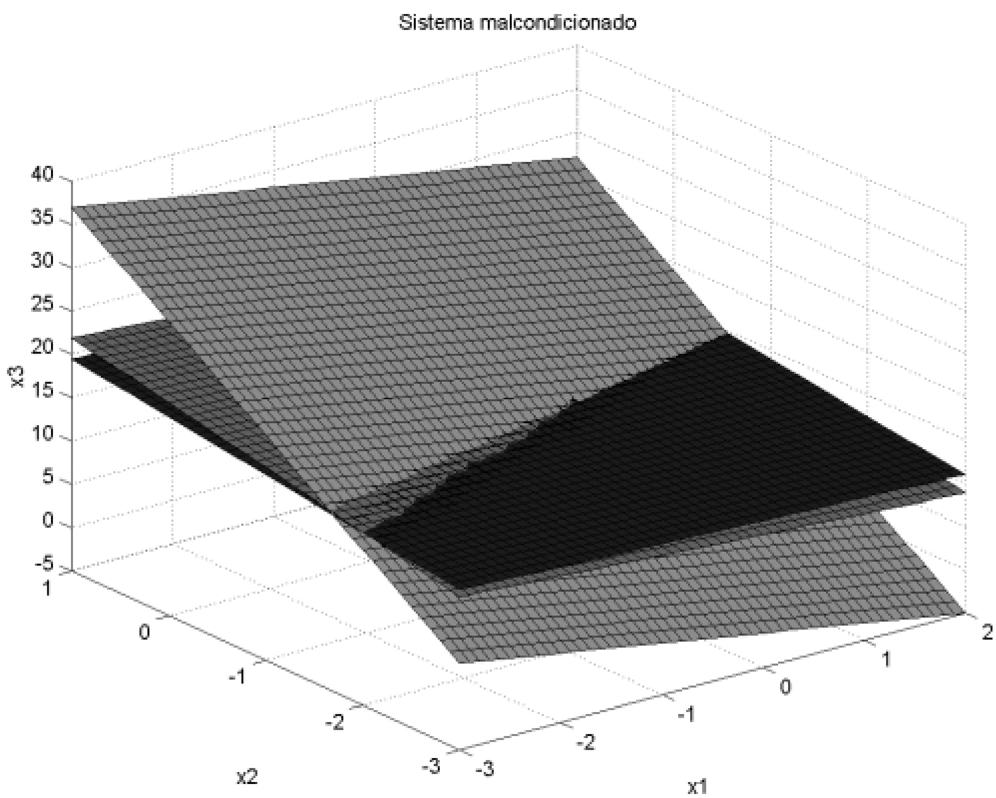
- solução exata: $x = [1\ 1]^T$.
- Vetor $\tilde{b} = [1{,}99\ 1{,}98]^T \approx b$.
- Solução exata de $Ay = \tilde{b}$ é $y = [100\ \ -99]^T$.
- Matriz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}99 \end{bmatrix} \approx A.$$

- Solução exata de $\tilde{A}z = b$ é $z = [2\ \ -1/99]^T$.
- Problemas causados porque A é quase singular $(\det(A) = -10^{-4})$.
- Sistema linear malcondicionado.

Interpretação geométrica

- Três planos definidos por um sistema linear.
- Dois planos são quase coincidentes.
- Deslocamento no ponto de interseção.



Problemas do malcondicionamento

- Solução exata de $Ax = b$ é $x = [1 \;\; 1]^T$.

- Resíduo para $\tilde{x} = [0{,}9 \;\; 1{,}1]^T$

$$\tilde{r} = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \tilde{r} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

- $\tilde{x} \neq x$, mas $\tilde{r} \approx 0$.

- Resíduo não é bom indicador de exatidão de x quando $Ax = b$ for malcondicionado.

- Instabilidade da solução.

- Se A e/ou b forem medidas experimentais.

Número de condição

- Medir singularidade de A por $\det(A)$ não constitui boa prática.
- $\det(A) \approx 0$ pode não indicar ocorrência de um malcondicionamento.
- Número de condição da matriz

$$\text{Condição}(A) = \kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|,$$

- $\|\cdot\|$: uma norma matricial qualquer.
- Valor de $\kappa(A)$ depende da norma utilizada.
- Por exemplo

$$\boxed{\kappa_2(A) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} & \text{se } A = A^T \\[2ex] \dfrac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} & \text{se } A \neq A^T \end{cases}}.$$

- $\lambda(A^{-1}) = \lambda^{-1}(A)$.
- Sistema $Ax = b$ é malcondicionado se $\kappa(A) \gg 0$.

Exemplo

- Calcular $\kappa_2(A)$ e $\kappa_2(B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

- Pela definição de $\kappa_2(A)$

$$\lambda(A) = (1{,}9801; -5{,}0504\times 10^{-5}),$$

$$\rightsquigarrow \kappa_2(A) = \frac{|1{,}9801|}{|-5{,}0504\times 10^{-5}|} = 3{,}9206\times 10^{4},$$

$$\lambda(B^T B) = (2{,}4548\times 10^{1}; 3{,}7222\times 10^{1}; 1{,}7423\times 10^{2})$$

$$\rightsquigarrow \kappa_2(B) = \sqrt{\frac{1{,}7423\times 10^{2}}{2{,}4548\times 10^{1}}} = 2{,}6641.$$

- A: sistema linear malcondicionado.

- B: sistema bem-condicionado.

Sensibilidade da solução

- Sistema $Ax = b$ e δb: perturbação em b.
- Modificação δx na solução $x = A^{-1}b$ satisfaz

$$\delta x = A^{-1}\delta b.$$

- Propriedades das normas consistentes

$$\|A\|\|x\| \geq \|b\| \text{ e } \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|.$$

- Combinando

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leadsto$$

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}.$$

- Limite superior ao erro relativo na solução x.

Exemplo

- Sistema $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix} \text{ e } \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}.$$

- Sejam $x = [1 \;\; 1]^T$, $\kappa_2(A) = 3{,}9206 \times 10^4$, $\|b\|_2 = 2{,}8002$ e $\|\delta b\|_2 = 10^{-2}$.

- Limite superior ao erro relativo

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2},$$

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq 3{,}9206 \times 10^4 \frac{10^{-2}}{2{,}8002} = 1{,}4001 \times 10^2.$$

- Com δb, x variou de $[1 \;\; 1]^T$ para $[100 \;\; -99]^T \rightarrow \delta x = [100-1 \;\; -99-1]^T \leadsto \|\delta x\|_2 = 1{,}4072 \times 10^2$.

- Sendo $\|x\|_2 = 1{,}4142$, na realidade,

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{1{,}4072 \times 10^2}{1{,}4142} = 9{,}9505 \times 10^1.$$

- Está dentro do limite previsto.

Perturbação em A

- Seja

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b \to$$

$$Ax + A\,\delta x + \delta A\,x + \delta A\,\delta x = b \leadsto$$

$$A\,\delta x = -\delta A(x + \delta x).$$

- Tomando as normas consistentes

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x + \delta x\|,$$

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$

- Maior malcondicionamento de $Ax = b$, maior influência de δA em A na solução x.

- Coeficientes de A conhecidos com precisão de 4 decimais e $\kappa(A) = 10^3$, x pode ter precisão de 1 decimal.

Exemplo

- Sistema $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix},\ \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \end{bmatrix}.$$

- Sejam $\kappa_2(A) = 3{,}9206 \times 10^4$, $\|\delta A\|_2 = 10^{-2}$ e $\|A\|_2 = 1{,}9801$.

- Erro relativo

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2},$$

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} \leq 3{,}9206 \times 10^4 \frac{10^{-2}}{1{,}9801} = 1{,}9800 \times 10^2.$$

- Com δA, x variou de $[1\ 1]^T$ para $\tilde{x} = [2\ \ -1/99]^T$.

- Variação na solução $\delta x = [2 - 1\ \ -1/99 - 1]^T$.

- Erro relativo real

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} = \frac{1{,}4214}{2{,}0000} = 7{,}1070 \times 10^{-1}.$$

- Está dentro do limite previsto.