# 6. Raízes de equações

6.1 Isolamento de raízes.

6.2 Método da bisseção.

6.3 Métodos baseados em aproximação linear.

6.4 Métodos baseados em aproximação quadrática.

6.5 Métodos baseados em tangente.

6.6 Comparação dos met. para cálculo de raízes.

6.7 Estudos de caso:

- Juros de financiamento.
- Cabo suspenso.

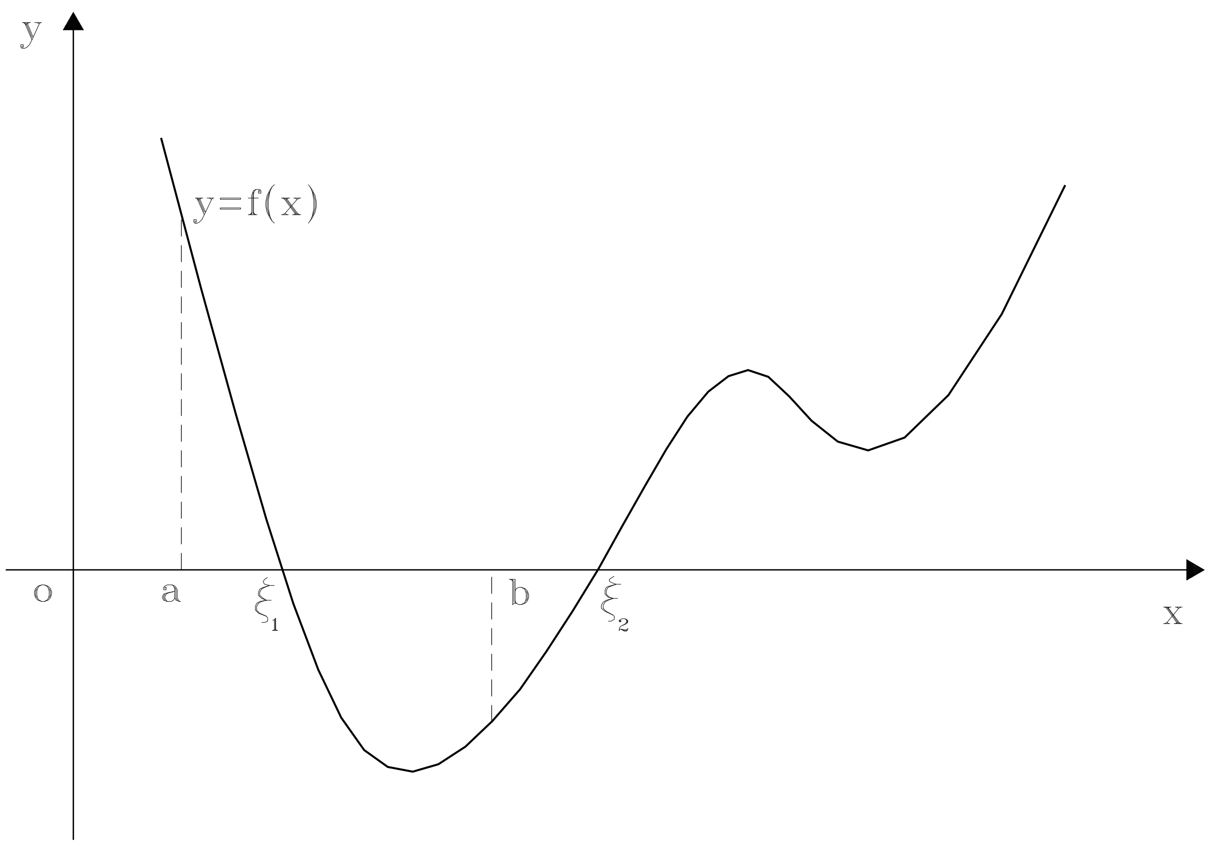
6.8 Exercícios.

# Raízes de equações

- Encontrar valores de $x = \xi$ que satisfaçam

  $$f(x) = 0.$$

- Valores especiais chamados de raízes da equação $f(x) = 0$ ou zeros da função $f(x)$.



# Fases para cálculo de uma raiz

- Equações algébricas de grau até quatro podem ter suas raízes calculadas por meio de uma expressão.
- Por exemplo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para as duas raízes de

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0.$$

- Raízes que não podem ser achadas analiticamente.
- Problema de calcular uma raiz

  1. Isolamento da raiz: intervalo $[a, b]$ que contenha uma, e somente uma, raiz de $f(x) = 0$.
  2. Refinamento da raiz: a partir de $x_0 \in [a, b]$ gerar uma seqüência $\{x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_k, \ldots, \xi\}$.

# Isolamento de raízes

- Maioria dos métodos para cálculo de raízes necessita que a mesma esteja confinada em um dado intervalo.
- Esta raiz deve ser única em tal intervalo.
- Teoremas da Álgebra fornecem importantes informações sobre as equações polinomiais.
- Isolamento de raízes das equações algébricas.
- Isolamento de raízes das transcendentes.

# Equações algébricas

- Equação algébrica de grau $n$, $n \geq 1$

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0.$$

- Avaliação de polinômio

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0.$$

- Em $x = a$

$$P(a) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_2 a^2 + c_1 a + c_0.$$

- Avaliar $P(a)$ de grau $n$: $n(n+1)/2$ multiplicações e $n$ adições.
- Por exemplo, em $x = 2$

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1,$$

$$P(2) = 3 \cdot 2^5 - 2 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 127.$$

- Requeridas 15 multiplicações e 5 adições.

# Método de Horner

- Maneira mais eficiente de avaliar um polinômio.
- Consiste em reescrever o polinômio de forma a evitar potências.

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

$$(c_n x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-2} + \cdots + c_2 x + c_1)x + c_0,$$

$$((c_n x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-3} + \cdots + c_2)x + c_1)x + c_0,$$

$$\vdots$$

$$P(x) = \underbrace{(\ldots(}_{n-1} c_n x + c_{n-1})x + \cdots + c_2)x + c_1)x + c_0.$$

- Requer apenas $n$ multiplicações e $n$ adições para avaliar um polinômio de grau $n$.
- Por exemplo, em $x = 2$

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1,$$

$$P(x) = ((((3x - 2)x + 5)x + 7)x - 3)x + 1,$$

$$P(2) = ((((3\cdot2-2)2+5)2+7)2-3)2+1=127.$$

# Algoritmo: método de Horner

```
Algoritmo Horner
{ Objetivo: Avaliar polinômio de grau n em a }
parâmetros de entrada n, c, a
  { grau, coeficientes e ponto, onde c é tal que }
  { P(x)=c(1)x^n+c(2)x^(n-1)+···+c(n)x+c(n+1) }
parâmetros de saída a, y { a, P(a) }
  y ← c(1)
  para i ← 2 até n + 1 faça
    y ← y * a + c(i)
  fim para
fim algoritmo
```

# Propriedades gerais

- **Teorema**
  Uma equação algébrica de grau $n$ tem exatamente $n$ raízes, reais ou complexas, contando cada raiz de acordo com a sua multiplicidade.

- Uma raiz $\xi$ tem multiplicidade $m$ se

$$P(\xi) = P'(\xi) = P''(\xi) = \ldots = P^{m-1}(\xi) = 0 \text{ e}$$

$$P^{m}(\xi) \neq 0$$

sendo

$$P^{i}(\xi) = \left.\frac{d^{i}P(x)}{dx^{i}}\right|_{x = \xi,\ i = 1, 2, \ldots, m.}$$

# Exemplo

- Seja

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 \to P(1) &= 0,\\
P'(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14 \qquad \to P'(1) &= 0,\\
P''(x) &= 12x^2 + 12x - 24 \qquad \to P''(1) &= 0,\\
P'''(x) &= 24x + 12 \qquad \to P'''(1) &= 36.
\end{aligned}$$

- Raiz $\xi = 1$ é de multiplicidade $m = 3$.

- Polinômio de grau $4$ escrito na forma fatorada

$$P(x) = (x-1)^3(x+5).$$

# Raízes Complexas

- **Teorema**

  Se os coeficientes de uma equação algébrica forem reais, então suas raízes complexas serão complexos conjugados em pares, ou seja, se $\xi_1 = a + bi$ for uma raiz de multiplicidade $m$, então $\xi_2 = a - bi$ também será uma raiz e com a mesma multiplicidade $m$.

- Raízes de $P(x) = x^2 - 4x + 13 = 0$ são

$$\xi = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} \rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 2 + 3i \\ \xi_2 = 2 - 3i. \end{cases}$$

- **Corolário**

  Uma equação algébrica de grau ímpar com coeficientes reais tem, no mínimo, uma raiz real.

- Raízes de $P(x) = x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0$ são $\xi_1 = 5$, $\xi_2 = 2 + 3i$ e $\xi_3 = 2 - 3i$.

- Equação de grau $3$ tem uma raiz real.

# Relações de Girard

- Sendo $\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ as raízes de $P(x) = 0$

$$P(x) = c_n(x - \xi_1)(x - \xi_2)\ldots(x - \xi_n) = 0.$$

- Multiplicando os fatores

$$P(x) = c_n x^n - c_n(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)x^{n-1}$$

$$+ c_n(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \cdots + \xi_1\xi_n + \xi_2\xi_3 + \cdots + \xi_2\xi_n + \cdots + \xi_{n-1}\xi_n)x^{n-2}$$

$$- c_n(\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_2\xi_4 + \cdots + \xi_1\xi_2\xi_n + \xi_1\xi_3\xi_4 + \cdots + \xi_{n-2}\xi_{n-1}\xi_n)x^{n-3}$$

$$+ \cdots (-1)^n c_n(\xi_1\xi_2\xi_3\ldots\xi_n) = 0.$$

- Condição de igualdade das equações algébricas, $P(x) = 0$ escrita na forma de potências

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n},$$

$$\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \cdots + \xi_1\xi_n + \xi_2\xi_3 + \cdots + \xi_2\xi_n + \cdots + \xi_{n-1}\xi_n = \frac{c_{n-2}}{c_n},$$

$$\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_2\xi_4 + \cdots + \xi_1\xi_2\xi_n + \xi_1\xi_3\xi_4 + \cdots + \xi_{n-2}\xi_{n-1}\xi_n = -\frac{c_{n-3}}{c_n},$$

$$\vdots$$

$$\xi_1\xi_2\xi_3\ldots\xi_n = (-1)^n\frac{c_0}{c_n}.$$

# Exemplo

- As raízes da equação

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0,$$

são $\xi_1 = 5$, $\xi_2 = 2 + 3i$ e $\xi_3 = 2 - 3i$.

- Relações de Girard

$$5 + (2 + 3i) + (2 - 3i) = 9 = -\frac{-9}{1},$$

$$5(2+3i) + 5(2-3i) + (2+3i)(2-3i) = 33 = \frac{33}{1},$$

$$5(2 + 3i)(2 - 3i) = 65 = (-1)^3\frac{-65}{1}.$$

# Limites das raízes reais

- **Teorema (Lagrange)**
  Dada a equação

  $$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0,$$

  se $c_n > 0$ e $k$ $(0 \leq k \leq n-1)$ for o maior índice de coeficiente escolhido dentre os coeficientes negativos, então o limite superior das raízes positivas de $P(x) = 0$ pode ser dado por

  $$\boxed{L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{c_n}}},$$

  onde $B$ é o módulo do maior coeficiente negativo em valor absoluto.

- Se $\xi_p$ for a maior das raízes positivas, então $\xi_p \leq L$.

- Se $c_i \geq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, então $P(x) = 0$ não tem raízes positivas, pois $P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i > 0$ para $c_i > 0$ e $x > 0$.

# Exemplo

- Seja

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0.$$

- Coeficientes negativos

$$c_{\underline{2}} = -13 \text{ e } c_{\underline{1}} = -14 \longrightarrow$$

$$k = 2 \;\; (\underline{2} > \underline{1}) \text{ e } B = |-14|.$$

- Teorema de Lagrange

$$L = 1 + \sqrt[4-2]{\frac{14}{1}} \rightarrow L = 4{,}74.$$

- $P(x) = 0$ não tem nenhuma raiz maior que $4{,}74$.

# Equações auxiliares

- Equações auxiliares

$$P_1(x) = x^n P(1/x) = 0,$$
$$P_2(x) = P(-x) = 0,$$
$$P_3(x) = x^n P(-1/x) = 0.$$

- Raízes de $P(x) = 0$ sendo $\xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
- Raízes de$P_1(x) = 0$ são $1/\xi_i$.
- Raízes de $P_2(x) = 0$ são $-\xi_i$.
- Raízes de $P_3(x) = 0$ são $-1/\xi_i$.
- Se $1/\xi_q$ for a maior das raízes positivas de $P_1(x)=0$

$$\frac{1}{\xi_q} \leq L_1 \rightarrow \xi_q \geq \frac{1}{L_1},$$

- Se $P(x) = 0$ possuir raízes positivas $\xi^+$

$$\boxed{\frac{1}{L_1} \leq \xi^+ \leq L}.$$

- Se $P(x) = 0$ tiver raízes negativas $\xi^-$

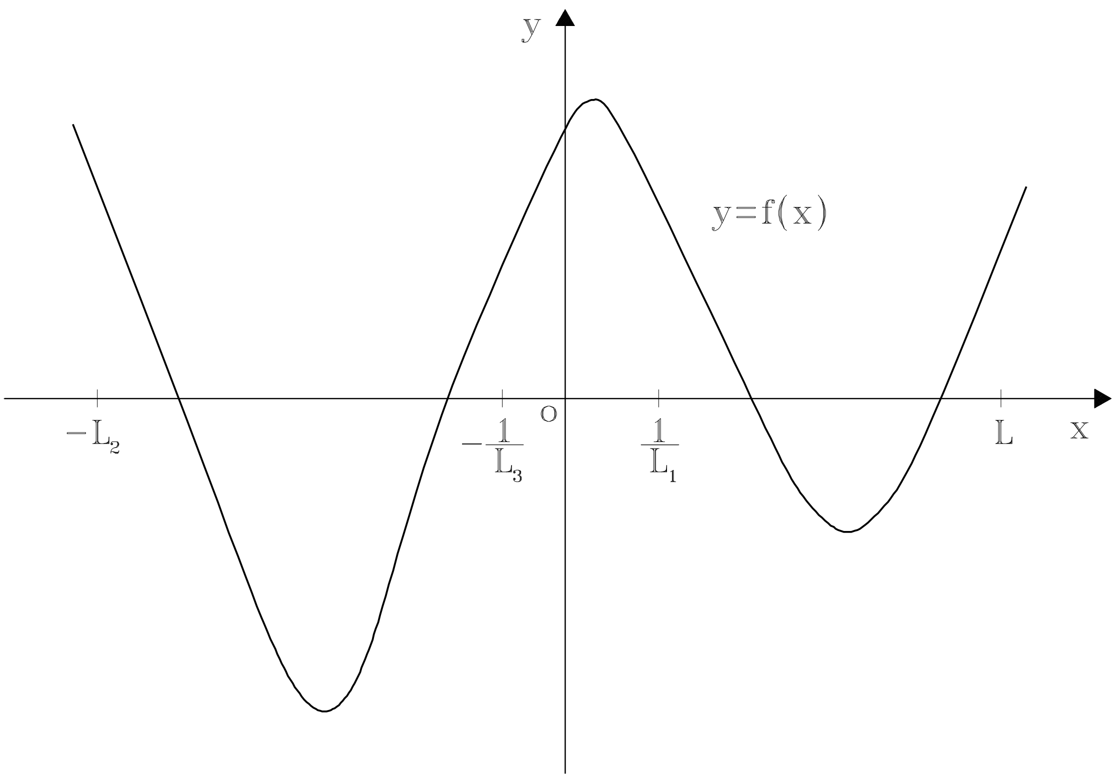
$$\boxed{-L_2 \leq \xi^- \leq -\frac{1}{L_3}}.$$

# Limites das raízes reais

- Limites não garantem a existência das raízes reais.

- Apenas informam onde as raízes reais estarão, caso existam.



# Exemplo

- Calcular os limites das raízes de

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0.$$

- Equações auxiliares

$$P_1(x) = x^4 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^4\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} - \frac{13}{x^2} - \frac{14}{x} + 24\right) = 0,$$

$$P_1(x) = 24x^4 - 14x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$L_1 = 1 + \sqrt[4-3]{\frac{14}{24}} \rightsquigarrow \frac{1}{L_1} = 0{,}63,$$

$$P_2(x) = P(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^3 - 13(-x)^2 - 14(-x) + 24 = 0,$$

$$P_2(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0,$$

$$L_2 = 1 + \sqrt[4-3]{\frac{13}{1}} \rightsquigarrow -L_2 = -14,$$

$$P_3(x) = x^4 P\left(\frac{1}{-x}\right) = x^4\left(\frac{1}{(-x)^4} + \frac{2}{(-x)^3} - \frac{13}{(-x)^2} - \frac{14}{(-x)} + 24\right) = 0,$$

$$P_3(x) = 24x^4 + 14x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$L_3 = 1 + \sqrt[4-2]{\frac{13}{24}} \rightsquigarrow -\frac{1}{L_3} = -0{,}58.$$

- Limites das raízes reais

$$0{,}63 \leq \xi^+ \leq 4{,}74 \text{ e } -14 \leq \xi^- \leq -0{,}58.$$

# Dispositivo prático

- Calcular os limites das raízes de

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0.$$

| $n=4$ | $P(x)$ | $P_1(x)$ | $P_2(x)$ | $P_3(x)$ |
|---|---:|---:|---:|---:|
| $c_4$ | 1 | 24 | 1 | 24 |
| $c_3$ | 2 | $-14$ | $-2$ | 14 |
| $c_2$ | $-13$ | $-13$ | $-13$ | $-13$ |
| $c_1$ | $-14$ | 2 | 14 | $-2$ |
| $c_0$ | 24 | 1 | 24 | 1 |
| $k$ | 2 | 3 | 3 | 2 |
| $n-k$ | 2 | 1 | 1 | 2 |
| $B$ | $\|-14\|$ | $\|-14\|$ | $\|-13\|$ | $\|-13\|$ |
| $L_i$ | 4,74 | 1,58 | 14 | 1,74 |
| $L_\xi$ | 4,74 | 0,63 | $-14$ | $-0{,}58$ |

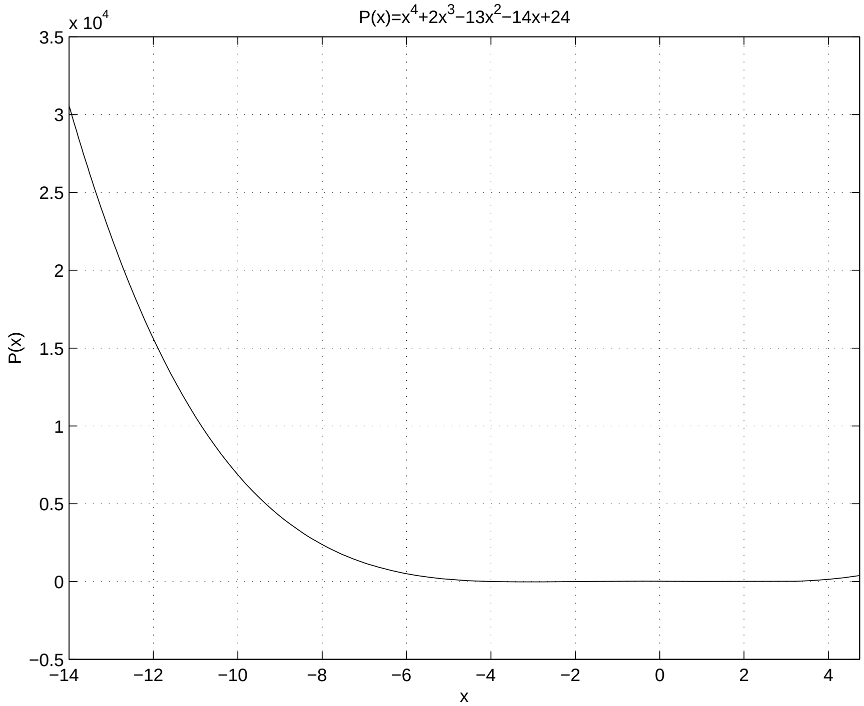
.

- Limites das raízes reais

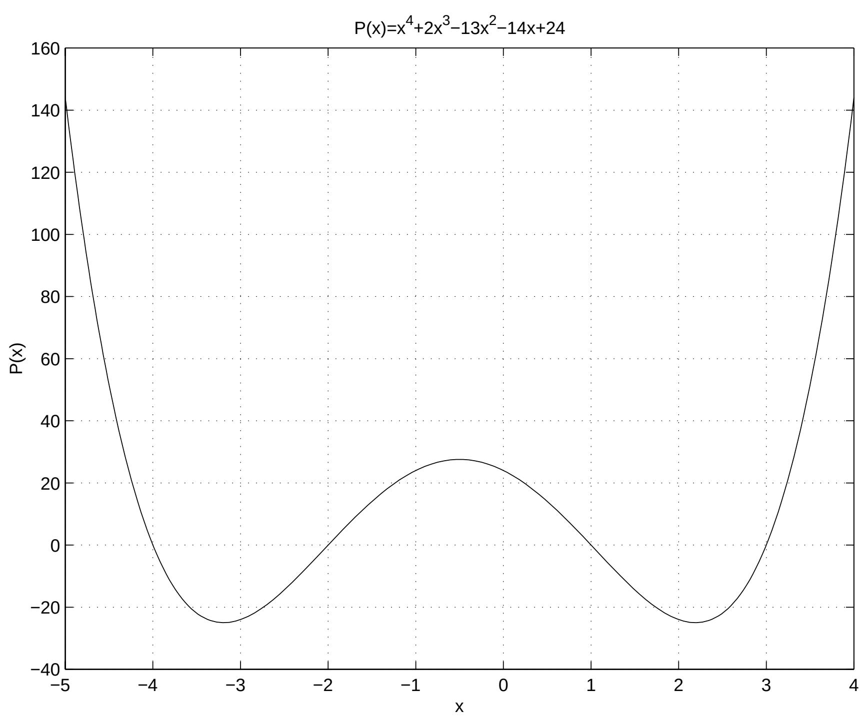
$$0{,}63 \leq \xi^+ \leq 4{,}74 \text{ e } -14 \leq \xi^- \leq -0{,}58.$$

# Gráficos de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

- Intervalo $-14 \leq x \leq 4{,}74$




- Intervalo $-5 \leq x \leq 4$



# Algoritmo: limites de raízes reais

```
Algoritmo LimitesRaizes
{ Objetivo: Achar os limites das raízes de equação polinomial }
parâmetros de entrada n, c { grau do polinômio e coeficientes sendo }
  { P(x) = c(1) * x^n + c(2) * x^(n-1) + ··· + c(n) * x + c(n+1) }
parâmetros de saída L
  { Limites inferior e superior das raízes positivas e negativas }
  se c(1) = 0 então  escreva "coeficiente c(1) nulo"; abandone  fim se
  t ← n + 1; c(t + 1) ← 0
  repita  { Se c(n+1) for nulo, então o polinômio é deflacionado }
    se c(t) ≠ 0 então  interrompa  fim se; t ← t − 1
  fim repita; { Cálculo dos quatro limites das raízes reais }
  para i ← 1 até 4 faça
    se i = 2 ou i = 4 então  { Inversão da ordem dos coeficientes }
      para j ← 1 até t/2 faça
        Aux ← c(j); c(j) ← c(t − j + 1); c(t − j + 1) ← Aux
      fim para
    senão
      se i = 3 então  { Reinversão da ordem e troca de sinais dos coef. }
        para j ← 1 até t/2 faça
          Aux ← c(j); c(j) ← c(t − j + 1); c(t − j + 1) ← Aux
        fim para
        para j ← t − 1 até 1 passo −2 faça  c(j) ← −c(j)  fim para
      fim se
    fim se
    { Se c(1) for negativo, é trocado o sinal de todos os coeficientes }
    se c(1) < 0 então
      para j ← 1 até t faça  c(j) ← −c(j)  fim para
    fim se; k ← 2  { Cálculo de k, o maior índice dos coef. negativos }
    repita
      se c(k) < 0 ou k > t então  interrompa  fim se; k ← k + 1
    fim repita  { Cálculo de B, o maior coef. negativo em módulo }
    se k ≤ t então
      B ← 0
      para j ← 2 até t faça
        se c(j) < 0 e abs(c(j)) > B então  B ← abs(c(j))  fim se
      fim para
      { Limite das raízes positivas de P(x) = 0 e das eq. auxiliares }
      L(i) ← 1 + (k-1)√(B/c(1))
    senão  L(i) ← 10^100
    fim se
  fim para  { Limites das raízes positivas e negativas de P(x) = 0 }
  Aux ← L(1); L(1) ← 1/L(2); L(2) ← Aux; L(3) ← −L(3); L(4) ← −1/L(4)
fim algoritmo
```

# Número de raízes reais

- **Teorema (Regra de sinais de Descartes)**
  O número de raízes reais positivas $n^+$ de $P(x) = 0$ é igual ao número de variações de sinais na seqüência dos coeficientes ou é menor que este número por um inteiro par, sendo as raízes contadas de acordo com a sua multiplicidade e não sendo considerados os coeficientes nulos.

- **Corolário**
  Se $P(x) = 0$ não possuir coeficientes nulos, então o número de raízes reais negativas $n^-$ (contando multiplicidades) é igual ao número de permanências de sinais na seqüência dos coeficientes ou é menor que este número por um inteiro par.

- Regra de sinal de Descartes consegue discernir entre as raízes positivas e negativas.

- Não consegue separar as raízes reais das complexas, as quais aparecem em pares conjugados.

- Por exemplo, se o número de variações de sinais for $5$, então $n^+ = 5$ ou $3$ ou $1$.

# Exemplo

- Seja

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0,$$

$$n^+ = 2 \text{ ou } 0,$$

$$n^- = 2 \text{ ou } 0.$$

- Se existirem duas raízes positivas, elas satisfarão

$$0{,}63 \le \xi^+ \le 4{,}74.$$

- Se houver duas negativas, elas estarão no intervalo

$$-14 \le \xi^- \le -0{,}58.$$

# Exemplo

- Calcular os limites e o número de raízes reais de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

| $n\!=\!3$ | $P(x)$ | $P_1(x)$ | $P_2(x)$ | $P_3(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $c_3$ | 1 | 8 | $-1$ | 8 |
| $c_2$ | $-3$ | $-6$ | $-3$ | 6 |
| $c_1$ | $-6$ | $-3$ | 6 | $-3$ |
| $c_0$ | 8 | 1 | 8 | $-1$ |
| $k$ | | | | |
| $n-k$ | | | | |
| $B$ | | | | |
| $L_i$ | | | | |
| $L_\xi$ | | | | |

$$\xrightarrow[\text{de } P_2(x)]{\text{Trocar sinal}}$$

| $n\!=\!3$ | $P(x)$ | $P_1(x)$ | $P_2(x)$ | $P_3(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $c_3$ | 1 | 8 | 1 | 8 |
| $c_2$ | $-3$ | $-6$ | 3 | 6 |
| $c_1$ | $-6$ | $-3$ | $-6$ | $-3$ |
| $c_0$ | 8 | 1 | $-8$ | $-1$ |
| $k$ | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $n-k$ | 1 | 1 | 2 | 2 |
| $B$ | $\lvert-6\rvert$ | $\lvert-6\rvert$ | $\lvert-8\rvert$ | $\lvert-3\rvert$ |
| $L_i$ | 7 | 1,75 | 3,83 | 1,61 |
| $L_\xi$ | 7 | 0,57 | $-3{,}83$ | $-0{,}62$ |

- Limites das raízes

  $0{,}57 \leq \xi^+ \leq 7$ e $-3{,}83 \leq \xi^- \leq -0{,}62$.

- Número de raízes reais: $n^+ = 2$ ou $0$ e $n^- = 1$.

# Exemplo

- Achar os limites e o número de raízes reais de

$P(x) = x^6 - 5x^5 + 7x^4 + 19x^3 - 98x^2 - 104x = 0.$

$P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 + 19x^2 - 98x - 104 = 0.$

| $n=5$ | $P(x)$ | $P_1(x)$ | $P_2(x)$ | $P_3(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $c_5$ | 1 | −104 | −1 | −104 |
| $c_4$ | −5 | −98 | −5 | 98 |
| $c_3$ | 7 | 19 | −7 | 19 |
| $c_2$ | 19 | 7 | 19 | −7 |
| $c_1$ | −98 | −5 | 98 | −5 |
| $c_0$ | −104 | 1 | −104 | −1 |
| $k$ | | | | |
| $n-k$ | | | | |
| $B$ | | | | |
| $L_i$ | | | | |
| $L_\xi$ | | | | |

$\xrightarrow[P_1(x),\, P_2(x),\, P_3(x)]{\text{Trocar sinal de}}$

| $n=5$ | $P(x)$ | $P_1(x)$ | $P_2(x)$ | $P_3(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $c_5$ | 1 | 104 | 1 | 104 |
| $c_4$ | −5 | 98 | 5 | −98 |
| $c_3$ | 7 | −19 | 7 | −19 |
| $c_2$ | 19 | −7 | −19 | 7 |
| $c_1$ | −98 | 5 | −98 | 5 |
| $c_0$ | −104 | −1 | 104 | 1 |
| $k$ | 4 | 3 | 2 | 4 |
| $n-k$ | 1 | 2 | 3 | 1 |
| $B$ | $\|-104\|$ | $\|-19\|$ | $\|-98\|$ | $\|-98\|$ |
| $L_i$ | 105 | 1,43 | 5,61 | 1,94 |
| $L_\xi$ | 105 | 0,70 | −5,61 | −0,51 |

- Limites das raízes: $0{,}70 \leq \xi^+ \leq 105$; $-5{,}61 \leq \xi^- \leq -0{,}51$.
- Número de raízes reais: $n^+ = 3$ ou $1$ e $n^- = 2$ ou $0$.

# Equações transcendentes

- Equações transcendentes não dispõem de teoremas que forneçam informações sobre os limites e o número de raízes reais.
- Uma equação transcendente pode ter um número infinito de raízes

  $$f(x) = \text{sen}(x) = 0.$$

- Ou mesmo não ter raízes

  $$f(x) = \text{sen}(x) - 2 = 0.$$

- Método gráfico: maneira simples para achar um intervalo que contenha uma única raiz.
- Esboço da função no intervalo de interesse.
- Dificuldade em determinar este intervalo.
- Usar a intuição, o conhecimento a respeito da função e método da tentativa e erro.

## Algoritmo: intervalo onde função troca sinal

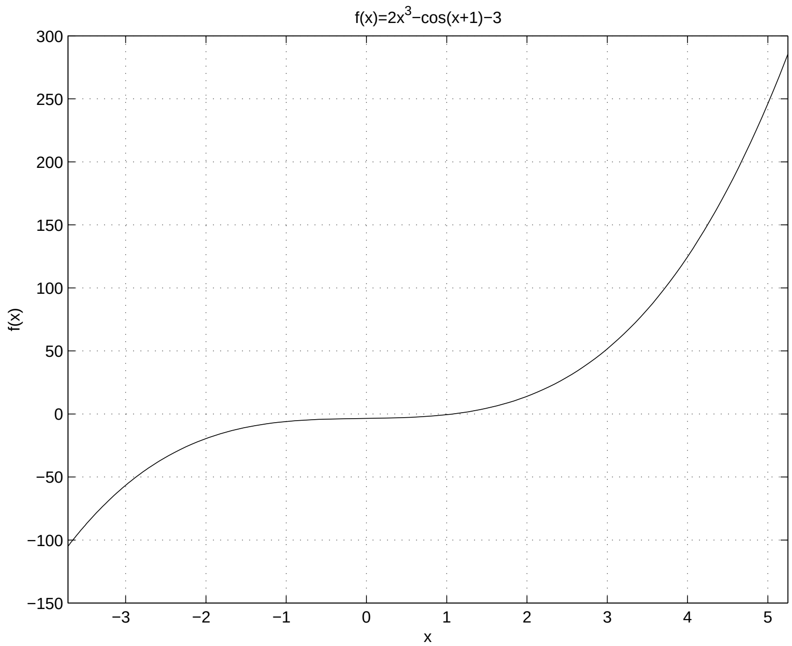
- Fornece um intervalo $[a, b]$, no qual uma função $f(x)$ troca de sinal, ou seja, $f(a)f(b) < 0$.
- Raiz não está necessariamente isolada, pois pode haver um número ímpar de raízes no intervalo.

```
Algoritmo Trocasinal
{ Objetivo: Achar intervalo onde a função troca de sinal }
parâmetros de entrada z
  { ponto a partir do qual o intervalo será gerado }
parâmetros de saída a, b, Erro
  { limite inf. e sup. do intervalo e condição de erro }
  se z = 0 então
    a ← −0,05; b ← 0,05
  senão
    a ← 0,95 ∗ z; b ← 1,05 ∗ z
  fim se
  Iter ← 0; Aureo ← 2/( raiz2(5) − 1)
  Fa ← f(a); Fb ← f(b)  { Avaliar f(x) em x = a e b }
  escreva Iter, a, b, Fa, Fb
  repita
    se Fa ∗ Fb ≤ 0 ou Iter ≥ 20 então  interrompa  fim se
    Iter ← Iter + 1
    se abs(Fa) < abs(Fb) então
      a ← a − Aureo ∗ (b − a)
      Fa ← f(a)  { Avaliar a função f(x) em x = a }
    senão
      b ← b + Aureo ∗ (b − a)
      Fb ← f(b)  { Avaliar a função f(x) em x = b }
    fim se
    escreva Iter, a, b, Fa, Fb
  fim repita
  se Fa ∗ Fb ≤ 0 então  Erro ← 0  senão  Erro ← 1  fim se
fim algoritmo
```

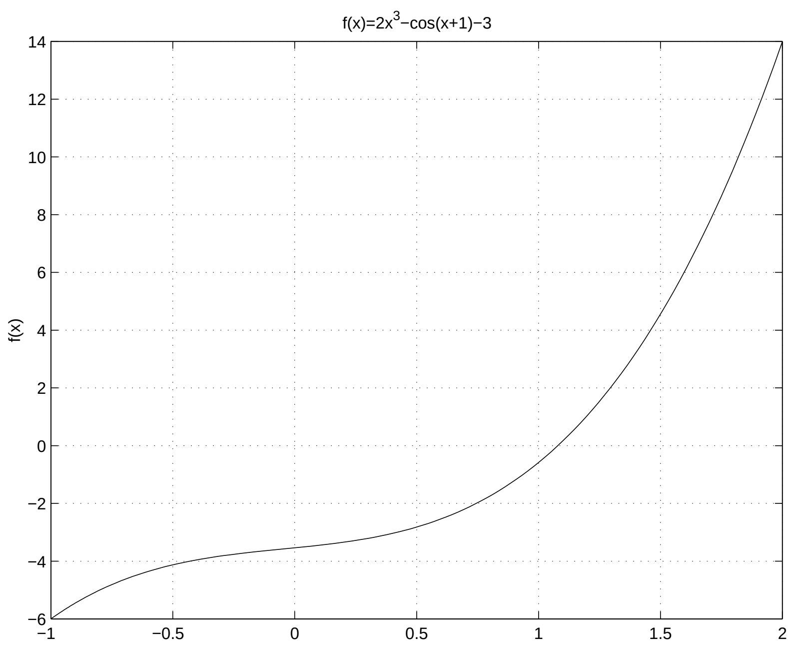
# Exemplo

- Achar um intervalo, a partir de $z = 5$, onde a função $f(x) = 2x^3 - \cos(x+1) - 3$ troca de sinal.

- Função em $-3{,}72 \le x \le 5{,}25$



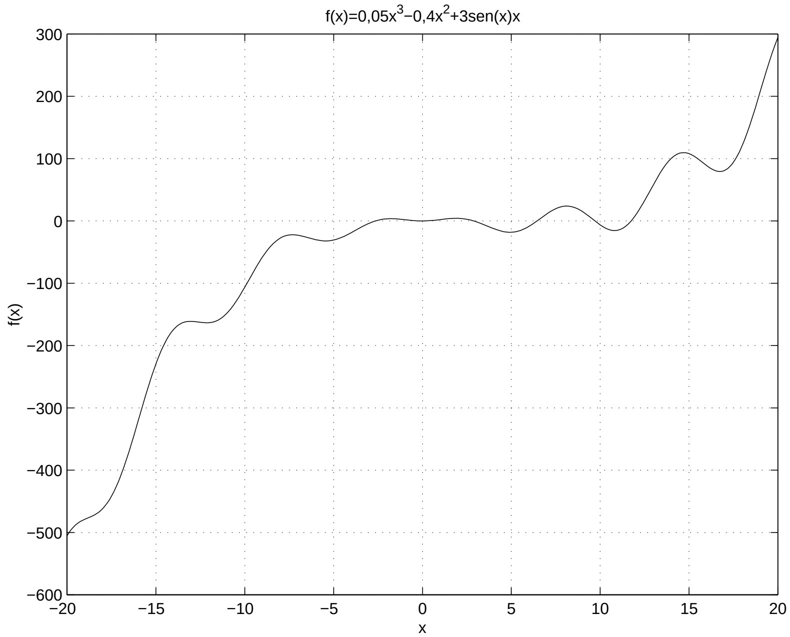

- Função em $-1 \le x \le 2$



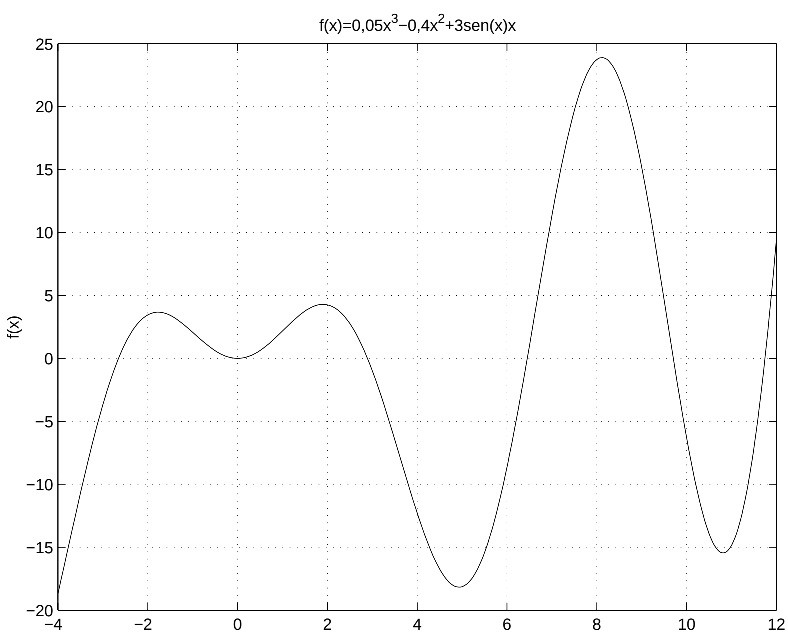
# Exemplo

- Isolar, graficamente, os zeros da função
  $f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}4x^2 + 3\,\mathrm{sen}(x)x.$

- Intervalo amplo: $-20 \le x \le 20$




- Melhor detalhamento: $-4 \le x \le 12$



# Convergência da raiz

- Raiz $\xi$ já isolada em um dado intervalo $[a, b]$.
- Gerar uma seqüência $\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, \xi\} \in [a, b]$ que convirja para a raiz exata $\xi$ de $f(x) = 0$.
- Critério de parada baseado em teorema
- **Teorema**
  Sejam $\xi$ uma raiz exata e $x_k$ uma raiz aproximada de $f(x) = 0$, sendo que $\xi$ e $x_k \in [a, b]$ e $|f'(x)| \geq m > 0$ para $a \leq x \leq b$, com

  $$m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

  Então o erro absoluto satisfaz

  $$|x_k - \xi| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}.$$

# Exemplo

- Avaliar o erro absoluto cometido ao considerar $x_k = 2{,}23$ como aproximação da raiz positiva de $f(x) = x^2 - 5 = 0$ no intervalo $[2,\ 3]$.

  $$m = \min_{2 \leq x \leq 3} |2x| = 4.$$

- Assim

  $$|2{,}23 - \xi| \leq \frac{0{,}0271}{4} = 0{,}0068 \rightarrow$$

  $$2{,}23 - 0{,}0068 \leq \xi \leq 2{,}23 + 0{,}0068;$$

  $$(\xi = \sqrt{5} \approx 2{,}2361).$$

# Critério de parada

- Teorema de aplicação muito restrita.
- Requer que seja avaliado o mínimo da derivada primeira da função $f(x)$.
- Seqüência interrompida quando seus valores satisfizerem pelo menos um dos critérios

$$\boxed{|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon},$$

$$\boxed{\left|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}\right| \le \varepsilon},$$

$$\boxed{|f(x_k)| \le \varepsilon},$$

- $\varepsilon$: tolerância fornecida.

# Ordem de convergência

- Definir a rapidez com que a seqüência gerada por um dado método, $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, converge para a raiz exata $\xi$.
- Seja o erro da $k$-ésima iteração

$$\epsilon_k = x_k - \xi,$$

- diferença entre a raiz $\xi$ e a sua estimativa $x_k$.
- Critério para avaliar a convergência

$$\lim_{k\to\infty} |\epsilon_{k+1}| = K|\epsilon_k|^\gamma,$$

- $K$: constante de erro assintótico,
- $\gamma$: ordem de convergência do método gerador da seqüência.
- Quanto maior o valor de $\gamma$ mais rápida a seqüência convergirá para a raiz da equação.

# Método da bisseção

- Seja $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$, sendo $\xi$ a única raiz de $f(x) = 0$ neste intervalo.
- O método da bisseção consiste em subdividir o intervalo ao meio a cada iteração.
- Manter o subintervalo que contenha a raiz, ou seja, aquele em que $f(x)$ tenha sinais opostos nos extremos.
- Seqüência de intervalos encaixados

$$\{[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ [a_3, b_3], \ldots, [a_k, b_k]\},$$

$$f(a_i)f(b_i) < 0,\ i = 1, 2, \ldots k.$$

- Na $k$-ésima iteração

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^{k-1}}.$$

- Seqüência $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ é monotônica não decrescente limitada.
- Seqüência $\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k\}$ é monotônica não crescente limitada.

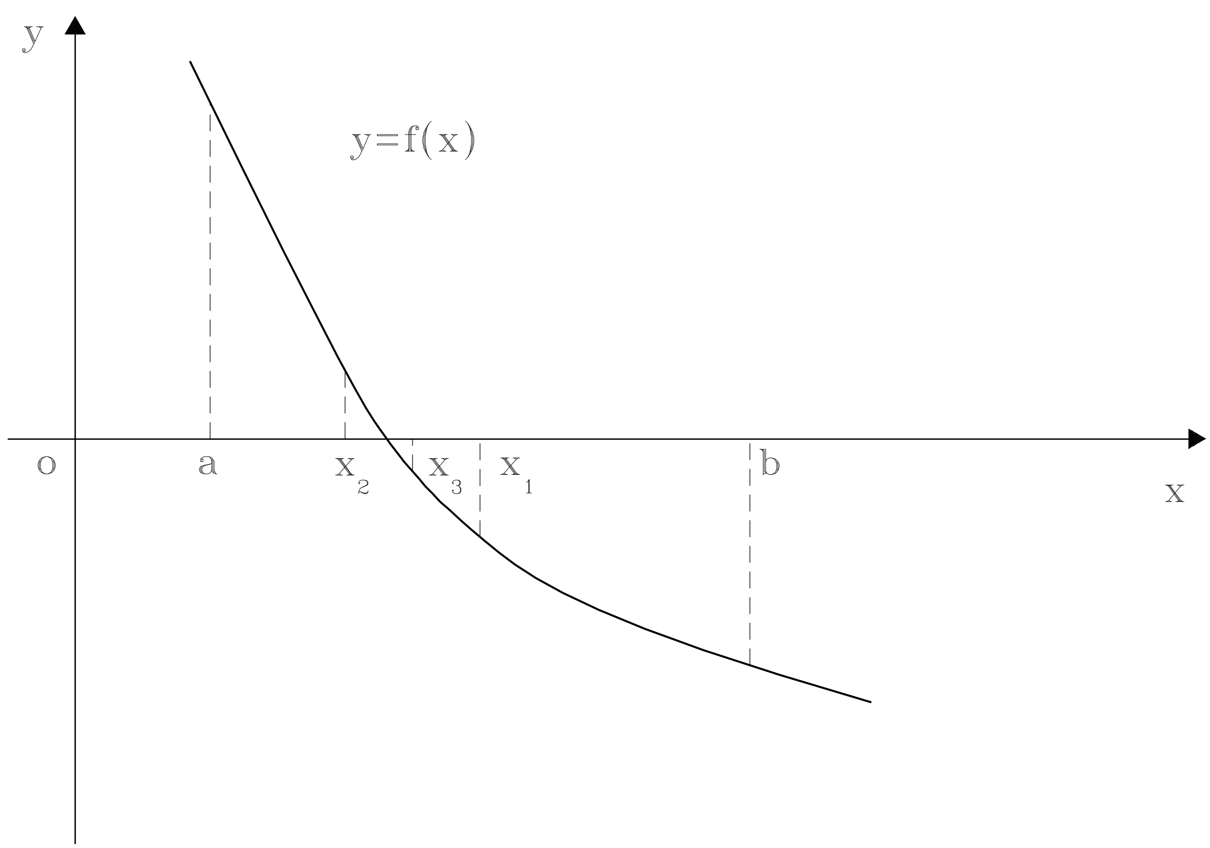
# Convergência do método da bisseção

- As duas seqüências possuem um limite comum $\xi$

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} b_k = \xi.$$

- Passando ao limite da desigualdade $f(a_i)f(b_i) < 0$ com $k \to \infty$

$$[f(\xi)]^2 \leq 0 \to f(\xi) = 0.$$



# Número de iterações

- Método da bisseção tem convergência garantida se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$ e se $\xi \in [a, b]$.
- É possível determinar *a priori* o número de iterações necessárias para calcular a raiz com uma tolerância $\varepsilon$ a partir de um intervalo $[a, b]$.
- Substituindo

$$x_k = \frac{b_k - a_k}{2}$$

- em

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^{k-1}},$$

- tem-se

$$|x_k - x_{k-1}| = \frac{b - a}{2^k} \leq \varepsilon,$$

$$\boxed{k \geq \log_2\left(\frac{b - a}{\varepsilon}\right)}.$$

# Algoritmo: método da bisseção

```
Algoritmo Bisseção
{ Objetivo: Calcular raiz pelo método da bisseção }
parâmetros de entrada a, b, Toler, IterMax
  { lim. intervalo, tolerância e num. max. de iterações }
parâmetros de saída Raiz, Iter, Erro
  { raiz, número gasto de iterações e condição de erro }
  Fa ← f(a); Fb ← f(b)  { Avaliar f(x) em x = a e x = b }
  se Fa ∗ Fb > 0 então
    escreva "função não muda de sinal nos extremos do intervalo"
    abandone
  fim se
  DeltaX ← abs(b − a)/2; Iter ← 0
  repita
    Iter ← Iter + 1; x ← (a + b)/2
    Fx ← f(x)  { Avaliar a função f(x) }
    escreva Iter, a, b, x, Fx, DeltaX
    se (DeltaX < Toler e abs(Fx) < Toler) ou Iter ≥ IterMax então
      interrompa
    fim se
    se Fa ∗ Fx > 0 então
      a ← x; Fa ← Fx
    senão
      b ← x
    fim se
    DeltaX ← DeltaX/2
  fim repita
  Raiz ← x
  se DeltaX < Toler e abs(Fx) < Toler então
    Erro ← 0
  senão
    Erro ← 1
  fim se
fim algoritmo
```

## Exemplo

- Calcular a raiz negativa de

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0,$$

com tolerância $\varepsilon \leq 0{,}05$ que está no intervalo $[-3{,}83;\ -0{,}62]$.

Calculo de raiz de equacao pelo metodo da bissecao

| iter | a | b | x | Fx | delta_x |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3.83000 | -0.62000 | -2.22500 | -4.51702e+00 | 1.60500e+00 |
| 2 | -2.22500 | -0.62000 | -1.42250 | 7.58604e+00 | 8.02500e-01 |
| 3 | -2.22500 | -1.42250 | -1.82375 | 2.89840e+00 | 4.01250e-01 |
| 4 | -2.22500 | -1.82375 | -2.02438 | -4.44112e-01 | 2.00625e-01 |
| 5 | -2.02438 | -1.82375 | -1.92406 | 1.31541e+00 | 1.00312e-01 |
| 6 | -2.02438 | -1.92406 | -1.97422 | 4.58098e-01 | 5.01562e-02 |
| 7 | -2.02438 | -1.97422 | -1.99930 | 1.26518e-02 | 2.50781e-02 |

- Raiz da equação é $\xi \approx x_7 = -1{,}99930$.

## Exemplo

- Calcular a raiz de

$$f(x) = 2x^3 - \cos(x+1) - 3 = 0,$$

pertencente ao intervalo $[-1, 2]$, com $\varepsilon \leq 0{,}01$.

Calculo de raiz de equacao pelo metodo da bissecao

| iter | a | b | x | Fx | delta_x |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1.00000 | 2.00000 | 0.50000 | -2.82074e+00 | 1.50000e+00 |
| 2 | 0.50000 | 2.00000 | 1.25000 | 1.53442e+00 | 7.50000e-01 |
| 3 | 0.50000 | 1.25000 | 0.87500 | -1.36062e+00 | 3.75000e-01 |
| 4 | 0.87500 | 1.25000 | 1.06250 | -1.28946e-01 | 1.87500e-01 |
| 5 | 1.06250 | 1.25000 | 1.15625 | 6.44191e-01 | 9.37500e-02 |
| 6 | 1.06250 | 1.15625 | 1.10938 | 2.43561e-01 | 4.68750e-02 |
| 7 | 1.06250 | 1.10938 | 1.08594 | 5.38636e-02 | 2.34375e-02 |
| 8 | 1.06250 | 1.08594 | 1.07422 | -3.83931e-02 | 1.17188e-02 |
| 9 | 1.07422 | 1.08594 | 1.08008 | 7.52110e-03 | 5.85938e-03 |

- Raiz é $\xi \approx x_9 = 1{,}08008$.

# Exemplo

- Determinar a maior raiz de

$$f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}4x^2 + 3\,\mathrm{sen}(x)x = 0,$$

com $\varepsilon \leq 0{,}005$, sabendo que $\xi \in [10,\ 12]$.

Calculo de raiz de equacao pelo metodo da bissecao

| iter | a | b | x | Fx | delta_x |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10.00000 | 12.00000 | 11.00000 | -1.48497e+01 | 1.00000e+00 |
| 2 | 11.00000 | 12.00000 | 11.50000 | -7.05935e+00 | 5.00000e-01 |
| 3 | 11.50000 | 12.00000 | 11.75000 | 2.01278e-01 | 2.50000e-01 |
| 4 | 11.50000 | 11.75000 | 11.62500 | -3.69752e+00 | 1.25000e-01 |
| 5 | 11.62500 | 11.75000 | 11.68750 | -1.81359e+00 | 6.25000e-02 |
| 6 | 11.68750 | 11.75000 | 11.71875 | -8.22289e-01 | 3.12500e-02 |
| 7 | 11.71875 | 11.75000 | 11.73438 | -3.14508e-01 | 1.56250e-02 |
| 8 | 11.73438 | 11.75000 | 11.74219 | -5.76111e-02 | 7.81250e-03 |
| 9 | 11.74219 | 11.75000 | 11.74609 | 7.15850e-02 | 3.90625e-03 |
| 10 | 11.74219 | 11.74609 | 11.74414 | 6.92471e-03 | 1.95312e-03 |
| 11 | 11.74219 | 11.74414 | 11.74316 | -2.53588e-02 | 9.76562e-04 |
| 12 | 11.74316 | 11.74414 | 11.74365 | -9.22092e-03 | 4.88281e-04 |
| 13 | 11.74365 | 11.74414 | 11.74390 | -1.14908e-03 | 2.44141e-04 |

- Raiz da equação é $\xi \approx x_{13} = 11{,}74390$.
- Método da bisseção é robusto mas não é eficiente devido à sua convergência lenta.

## Métodos baseados em aproximação linear

- Consiste em aproximar $f(x)$ por um polinômio linear no intervalo $[x_0, x_1]$.
- Estimativa da raiz $\xi$ é tomada como o valor onde a reta cruza o eixo das abscissas.
- Equação do polinômio de grau $1$ que passa pelos pontos de coordenadas $[x_0, f(x_0)]$ e $[x_1, f(x_1)]$

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1).$$

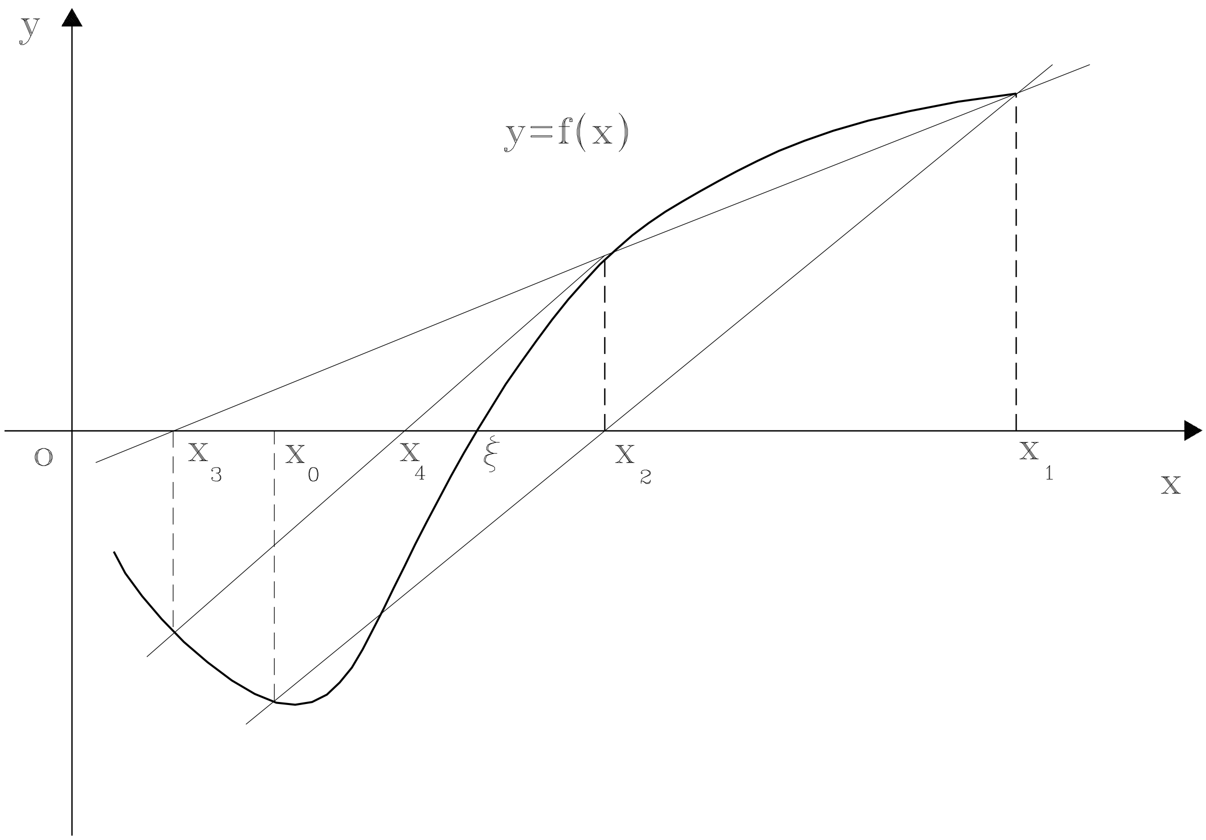
- Valor da abscissa $x_2$, para o qual $y = 0$, é tomado como uma aproximação da raiz

$$\boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)}.$$

- Na próxima iteração, um dos pontos extremos do intervalo $[x_0, x_1]$ será substituído por $x_2$, que é uma melhor estimativa da raiz $\xi$.
- Método da secante, da regula falsi e o pégaso.

# Método da secante

- Usa os pontos obtidos nas duas últimas iterações como pontos base por onde passará o polinômio linear.



# Algoritmo: método da secante

```
Algoritmo Secante
{ Objetivo: Calcular raiz pelo método da secante }
parâmetros de entrada a, b, Toler, IterMax
  { lim. intervalo, tolerância e num. max. de iterações }
parâmetros de saída Raiz, Iter, Erro
  { raiz, número gasto de iterações e condição de erro }
  Fa ← f(a); Fb ← f(b)  { Avaliar f(x) em x = a e x = b }
  se abs(Fa) < abs(Fb) então
    t ← a; a ← b; b ← t; t ← Fa; Fa ← Fb; Fb ← t
  fim se
  Iter ← 0; x ← b; Fx ← Fb
  repita
    Iter ← Iter + 1; DeltaX ← −Fx/(Fb − Fa) ∗ (b − a)
    x ← x + DeltaX; Fx ← f(x)  { Avaliar a função f(x) }
    escreva Iter, a, b, x, Fx, DeltaX
    se (abs(DeltaX) < Toler e abs(Fx) < Toler)
    ou Iter ≥ IterMax então
      interrompa
    fim se
    a ← b; Fa ← Fb; b ← x; Fb ← Fx
  fim repita
  Raiz ← x
  se abs(DeltaX) < Toler e abs(Fx) < Toler então
    Erro ← 0
  senão
    Erro ← 1
  fim se
fim algoritmo
```

# Exemplo

- Determinar a raiz de

$$f(x) = 2x^3 - \cos(x+1) - 3 = 0,$$

com $\varepsilon \leq 0{,}001$, sabendo-se que $\xi \in [-1,\ 2]$.

Calculo de raiz de equacao pelo metodo da secante

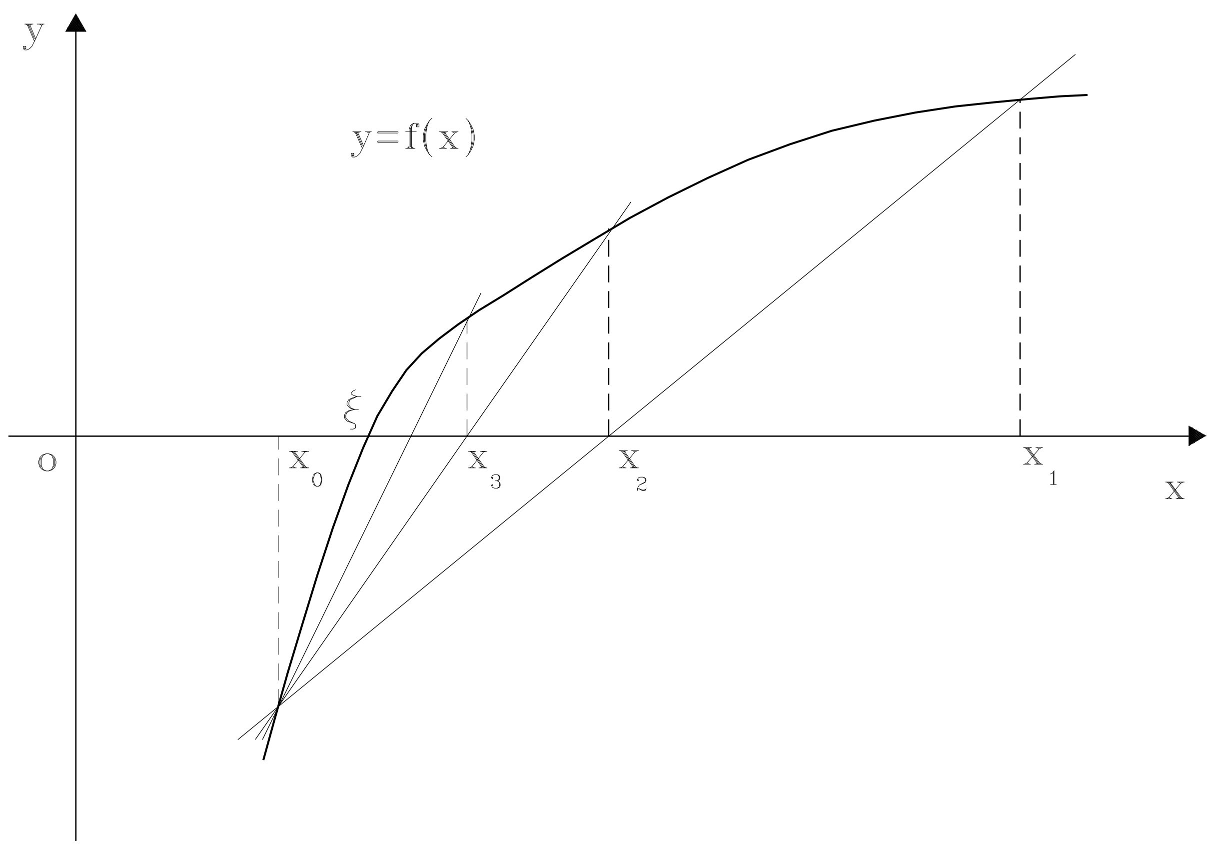
| iter | a | b | x | Fx | delta_x |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.00000 | -1.00000 | -0.09955 | -3.62323e+00 | 9.00451e-01 |
| 2 | -1.00000 | -0.09955 | 1.27313 | 1.77312e+00 | 1.37268e+00 |
| 3 | -0.09955 | 1.27313 | 0.82210 | -1.64011e+00 | -4.51031e-01 |
| 4 | 1.27313 | 0.82210 | 1.03883 | -3.06756e-01 | 2.16728e-01 |
| 5 | 0.82210 | 1.03883 | 1.08869 | 7.57552e-02 | 4.98610e-02 |
| 6 | 1.03883 | 1.08869 | 1.07881 | -2.43778e-03 | -9.87482e-03 |
| 7 | 1.08869 | 1.07881 | 1.07912 | -1.84038e-05 | 3.07862e-04 |

- Raiz da equação é $\xi \approx x_7 = 1{,}07912$.
- Método pode apresentar alguns problemas.
- Se a função não for, aproximadamente, linear no intervalo que contém a raiz, uma aproximação sucessiva pode sair deste intervalo.

# Método da regula falsi

- Maneira de evitar problemas é garantir que a raiz esteja isolada no intervalo inicial e continue dentro dos novos intervalos gerados.

- Método da regula falsi retém o ponto no qual o valor da função tem sinal oposto ao valor da função no ponto mais recente.



# Algoritmo: método da regula falsi

```
Algoritmo Regula Falsi
{ Objetivo: Calcular raiz pelo método da regula falsi }
parâmetros de entrada a, b, Toler, IterMax
  { lim. intervalo, tolerância e num. max. de iterações }
parâmetros de saída Raiz, Iter, Erro
  { raiz, número gasto de iterações e condição de erro }
  Fa ← f(a); Fb ← f(b); { Avaliar f(x) em x = a e x = b }
  se Fa * Fb > 0 então
    escreva "função não muda de sinal nos extremos do intervalo"
    abandone
  fim se
  se Fa > 0 então
    t ← a; a ← b; b ← t; t ← Fa; Fa ← Fb; Fb ← t
  fim se
  Iter ← 0; x ← b; Fx ← Fb
  repita
    Iter ← Iter + 1; DeltaX ← −Fx/(Fb − Fa) * (b − a)
    x ← x + DeltaX; Fx ← f(x); { Avaliar a função f(x) }
    escreva Iter, a, b, x, Fx, DeltaX
    se (abs(DeltaX) < Toler e abs(Fx) < Toler)
    ou Iter ≥ IterMax então
      interrompa
    fim se
    se Fx < 0 então
      a ← x; Fa ← Fx
    senão
      b ← x; Fb ← Fx
    fim se
  fim repita
  Raiz ← x
  se abs(DeltaX) < Toler e abs(Fx) < Toler então
    Erro ← 0   senão   Erro ← 1
  fim se
fim algoritmo
```

## Exemplo

- Achar a raiz de

$$f(x) = 2x^3 - \cos(x+1) - 3 = 0,$$

com $\varepsilon \leq 0{,}001$, sabendo-se que $\xi \in [-1,\ 2]$.

Calculo de raiz de equacao pelo metodo da regula falsi

| iter | a | b | x | Fx | delta_x |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1.00000 | 2.00000 | -0.09955 | -3.62323e+00 | -2.09955e+00 |
| 2 | -0.09955 | 2.00000 | 0.33235 | -3.16277e+00 | 4.31900e-01 |
| 3 | 0.33235 | 2.00000 | 0.63985 | -2.40710e+00 | 3.07495e-01 |
| 4 | 0.63985 | 2.00000 | 0.83952 | -1.55114e+00 | 1.99671e-01 |
| 5 | 0.83952 | 2.00000 | 0.95534 | -8.81016e-01 | 1.15826e-01 |
| 6 | 0.95534 | 2.00000 | 1.01723 | -4.63059e-01 | 6.18895e-02 |
| 7 | 1.01723 | 2.00000 | 1.04872 | -2.33276e-01 | 3.14868e-02 |
| 8 | 1.04872 | 2.00000 | 1.06432 | -1.14984e-01 | 1.56020e-02 |
| 9 | 1.06432 | 2.00000 | 1.07195 | -5.60652e-02 | 7.62768e-03 |
| 10 | 1.07195 | 2.00000 | 1.07565 | -2.71920e-02 | 3.70434e-03 |
| 11 | 1.07565 | 2.00000 | 1.07745 | -1.31542e-02 | 1.79314e-03 |
| 12 | 1.07745 | 2.00000 | 1.07831 | -6.35546e-03 | 8.66625e-04 |
| 13 | 1.07831 | 2.00000 | 1.07873 | -3.06878e-03 | 4.18519e-04 |
| 14 | 1.07873 | 2.00000 | 1.07893 | -1.48135e-03 | 2.02041e-04 |
| 15 | 1.07893 | 2.00000 | 1.07903 | -7.14969e-04 | 9.75179e-05 |

- Raiz da equação é $\xi \approx x_{15} = 1{,}07903$.
- Convergência só se fez de um lado do intervalo.
- Quanto mais longe o ponto fixo for da raiz, mais lenta será a convergência.

# Método pégaso

- Seqüência $\{x_i\}$ obtida pela fórmula de recorrência

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}),\ k = 1, 2, 3, \ldots}$$

- Pontos $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ e $[x_k, f(x_k)]$ são escolhidos de modo que $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ tenham sempre sinais opostos, garantindo $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$.

- Para evitar retenção de um ponto, valor de $f(x_{k-1})$ é reduzido por um fator

$$\frac{f(x_k)}{f(x_k) + f(x_{k+1})}.$$

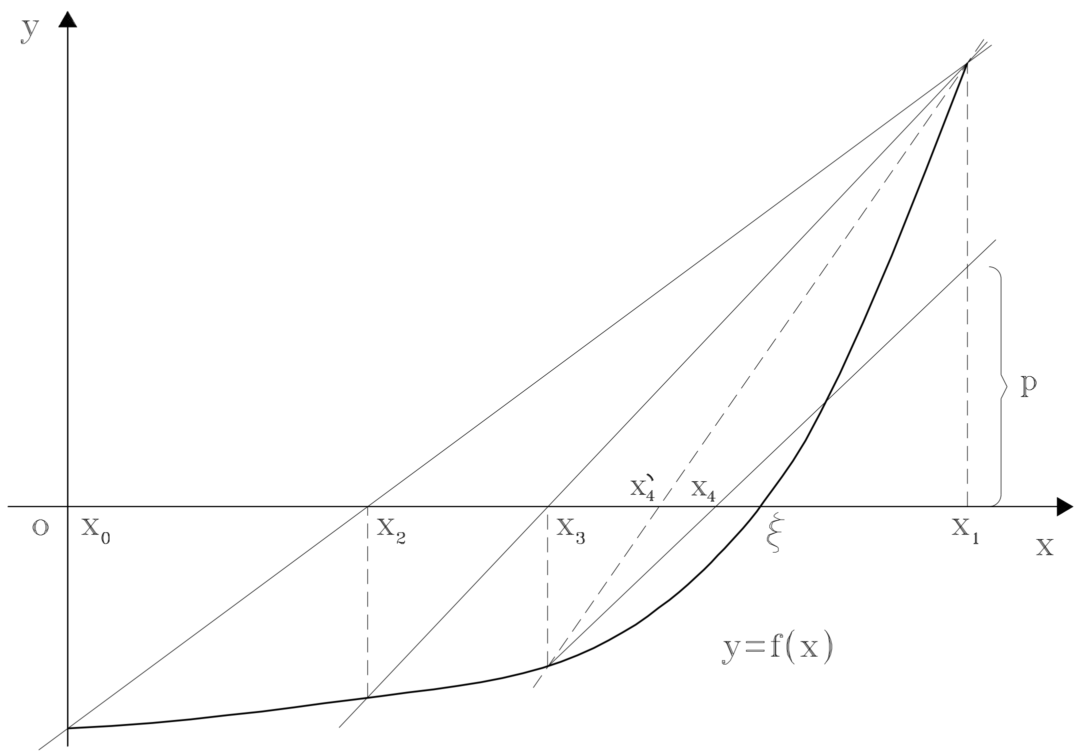
- Reta pode ser traçada por um ponto não pertencente à curva de $f(x)$.

# Interpretação gráfica do método pégaso

- Estimativa $x_4$ da raiz obtida usando os pontos $[x_3, f(x_3)]$ e $[x_1, p]$, sendo que

$$p = f(x_1)\frac{f(x_2)}{f(x_2) + f(x_3)}.$$

- $x_4$ é uma melhor aproximação da raiz do que $x_4'$ que seria obtido pelo método da regula falsi.



# Algoritmo: método pégaso

```
Algoritmo Pégaso
{ Objetivo: Calcular raiz de equação pelo método pégaso }
parâmetros de entrada a, b, Toler, IterMax
  { lim. intervalo, tolerância e num. max. de iterações }
parâmetros de saída Raiz, Iter, Erro
  { raiz, número gasto de iterações e condição de erro }
  Fa ← f(a); Fb ← f(b); { Avaliar f(x) em x = a e x = b }
  x ← b; Fx ← Fb; Iter ← 0
  repita
    Iter ← Iter + 1; DeltaX ← −Fx/(Fb − Fa) ∗ (b − a)
    x ← x + DeltaX; Fx ← f(x); { Avaliar a função f(x) }
    escreva Iter, a, b, x, Fx, DeltaX
    se (abs(DeltaX) < Toler e abs(Fx) < Toler)
    ou Iter ≥ IterMax então
      interrompa
    fim se
    se Fx ∗ Fb < 0 então
      a ← b; Fa ← Fb
    senão
      Fa ← Fa ∗ Fb/(Fb + Fx)
    fim se
    b ← x; Fb ← Fx
  fim repita
  Raiz ← x
  se abs(DeltaX) < Toler e abs(Fx) < Toler então
    Erro ← 0
  senão
    Erro ← 1
  fim se
fim algoritmo
```

## Exemplo

- Calcular com $\varepsilon \leq 0{,}001$, a raiz de

$$f(x) = 2x^3 - \cos(x+1) - 3 = 0,$$

sabendo-se que $\xi \in [-1,\ 2]$.

Calculo de raiz de equacao pelo metodo pegaso

| iter | a | Fa | b | Fb | x | Fx | delta_x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1.0000 | -6.0000 | 2.0000 | 13.9900 | -0.0995 | -3.6232 | -2.0995 |
| 2 | 2.0000 | 13.9900 | -0.0995 | -3.6232 | 0.3324 | -3.1628 | 0.4319 |
| 3 | 2.0000 | 7.4696 | 0.3324 | -3.1628 | 0.8284 | -1.6082 | 0.4961 |
| 4 | 2.0000 | 4.9518 | 0.8284 | -1.6082 | 1.1156 | 0.2954 | 0.2872 |
| 5 | 0.8284 | -1.6082 | 1.1156 | 0.2954 | 1.0711 | -0.0629 | -0.0446 |
| 6 | 1.1156 | 0.2954 | 1.0711 | -0.0629 | 1.0789 | -0.0018 | 0.0078 |
| 7 | 1.1156 | 0.2871 | 1.0789 | -0.0018 | 1.0791 | -0.0000 | 0.0002 |

- Raiz da equação é $\xi \approx x_7 = 1{,}0791$.

# Exemplo

- Determinar a raiz de

$$f(x) = 3x^2 + \sqrt{x+1}\cos^3(x) - 2 = 0,$$

com $\varepsilon \leq 10^{-5}$, sabendo-se que $\xi \in [0,\ 1]$.

Calculo de raiz de equacao pelo metodo pegaso

| iter | a | Fa | b | Fb | x | Fx | delta_x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | -1.0000 | 1.0000 | 1.2231 | 0.4498 | -0.5137 | -0.5502 |
| 2 | 1.0000 | 1.2231 | 0.4498 | -0.5137 | 0.6125 | -0.1788 | 0.1627 |
| 3 | 1.0000 | 0.9072 | 0.6125 | -0.1788 | 0.6763 | -0.0136 | 0.0638 |
| 4 | 1.0000 | 0.8433 | 0.6763 | -0.0136 | 0.6815 | 0.0007 | 0.0051 |
| 5 | 0.6763 | -0.0136 | 0.6815 | 0.0007 | 0.6812 | -0.0000 | -0.0002 |
| 6 | 0.6815 | 0.0007 | 0.6812 | -0.0000 | 0.6812 | -0.0000 | 0.0000 |

- Raiz é $\xi \approx x_6 = 0{,}6812$.

# Ordem de convergência

- Estimativa $x_2$ da raiz $\xi$ obtida por uma reta passando por $[x_0, f(x_0)]$ e $[x_1, f(x_1)]$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0) = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}.$$

- Expandindo $f(x_k)$ em série de Taylor com relação à raiz $\xi$.
- Considerando o erro da $k$-ésima iteração $\epsilon_k = x_k - \xi$

$$\epsilon_2 + \xi = \frac{(\epsilon_1+\xi)\left(\epsilon_0 f'(\xi)+\epsilon_0^2\frac{f''(\xi)}{2}+\cdots\right)-(\epsilon_0+\xi)\left(\epsilon_1 f'(\xi)+\epsilon_1^2\frac{f''(\xi)}{2}+\cdots\right)}{(\epsilon_0-\epsilon_1)f'(\xi)+(\epsilon_0^2-\epsilon_1^2)\frac{f''(\xi)}{2}+\cdots}.$$

- Simplificando

$$\epsilon_2 = \frac{\frac{f''(\xi)}{2}\epsilon_0\epsilon_1(\epsilon_0 - \epsilon_1) + \cdots}{f'(\xi)(\epsilon_0 - \epsilon_1) + \frac{f''(\xi)}{2}(\epsilon_0 - \epsilon_1)(\epsilon_0 + \epsilon_1) + \cdots}.$$

- Dividindo por $f'(\xi)(\epsilon_0 - \epsilon_1)$

$$\epsilon_2 = \frac{\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\epsilon_0\epsilon_1 + \cdots}{1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}(\epsilon_0 + \epsilon_1) + \cdots},$$

$$\epsilon_2 \approx \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\epsilon_0\epsilon_1.$$

# Ordem de convergência: regula falsi

- Sendo

$$\epsilon_2 \approx \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\epsilon_0\epsilon_1.$$

- $x_0$ será geralmente fixo durante várias iterações.
- Erro $\epsilon_0$ também será fixo

$$\epsilon_{k+1} = K_r\epsilon_k.$$

- Convergência de primeira ordem.

## Ordem de convergência: secante

- Sendo $\epsilon_2 \approx \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\epsilon_0\epsilon_1$.
- $x_k$ e $x_{k-1}$ são sempre atualizados

  $$\epsilon_{k+1} = C\epsilon_{k-1}\epsilon_k, \ \ |\epsilon_{k+1}| = K|\epsilon_k|^\gamma \to K|\epsilon_k|^\gamma = |C||\epsilon_k| \left(\frac{|\epsilon_k|}{K}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

- Rearranjando

  $$K^{1+\frac{1}{\gamma}}|\epsilon_k|^\gamma = |C||\epsilon_k|^{1+\frac{1}{\gamma}}.$$

- $\gamma$ deve ser positivo tal que

  $$\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma} \to \gamma^2 - \gamma - 1 = 0 \leadsto \gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803.$$

- Ordem de convergência igual à relação áurea.
- Como

  $$K^{1+\frac{1}{\gamma}} = |C|,$$

  $$1 + \frac{1}{\gamma} = \gamma \to K^\gamma = |C| \to K = |C|^{\frac{1}{\gamma}} = |C|^{\gamma-1}.$$

- Secante apresenta

  $$|\epsilon_{k+1}| \approx \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\right|^{\gamma-1} |\epsilon_k|^\gamma.$$

- Pégaso tem ordem de convergência 1,642.

## Métodos baseados em aproximação quadrática

- Cálculo de raiz baseado na aproximação da função $f(x)$ por um polinômio interpolador de grau 1.
- Estimativa da raiz é o ponto onde a reta intercepta o eixo das abscissas.
- Estimativa pode ser ainda melhor.
- Polinômio de grau 2.

# Método de Muller

- Consiste em aproximar $f(x)$, na vizinhança da raiz $\xi \in [x_0, x_2]$, por um polinômio quadrático.
- Polinômio construído de modo a passar pelos três pontos de coordenadas $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ e $[x_2, f(x_2)]$.
- Zero do polinômio usado como uma estimativa da raiz $\xi$ de $f(x) = 0$.
- Processo repetido usando sempre os três pontos mais próximos da raiz.
- Dados os três pontos de coordenadas

  $[x_{i-2}, f(x_{i-2})], [x_{i-1}, f(x_{i-1})]$e $[x_i, f(x_i)]$.

- Polinômio de segundo grau

  $$P_2(v) = av^2 + bv + c$$

- com $v = x - x_{i-1}$.

## Interpretação gráfica do método de Muller

- Para cada um dos três pontos

$$P_2(x_{i-2}) = f(x_{i-2}) \rightarrow$$

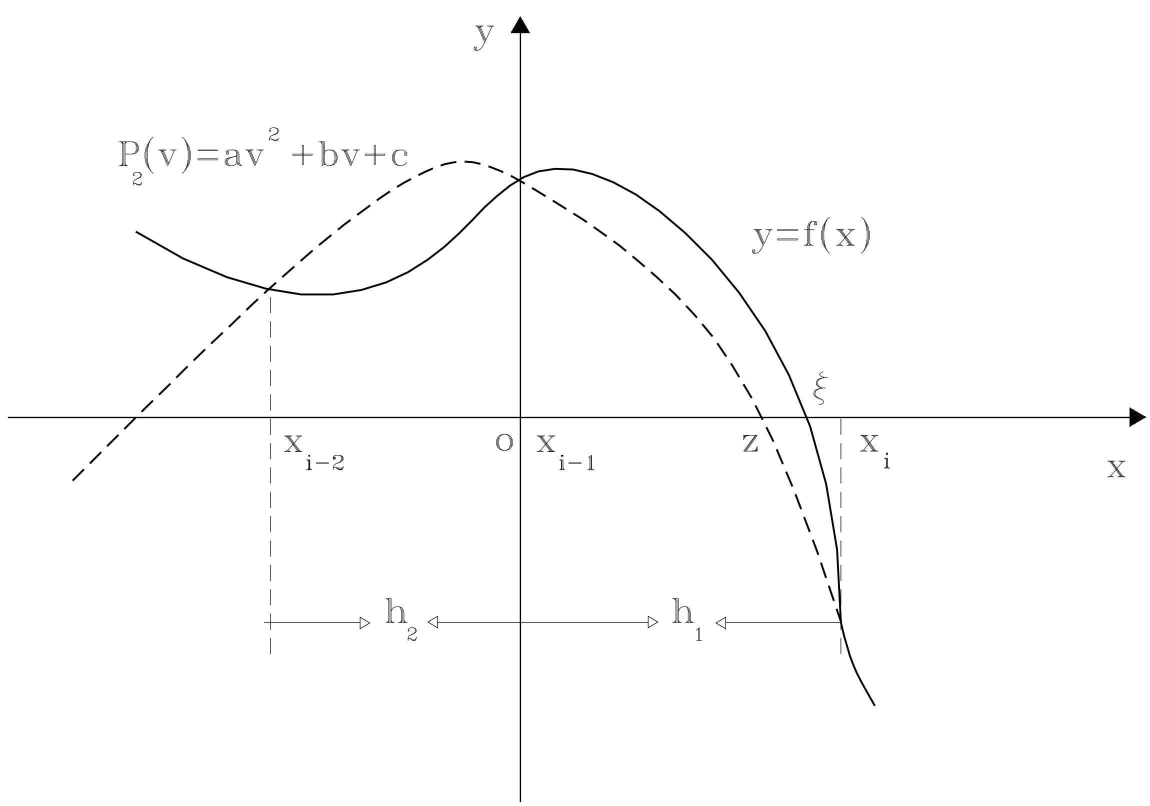
$$a(x_{i-2} - x_{i-1})^2 + b(x_{i-2} - x_{i-1}) + c = f(x_{i-2}),$$

$$P_2(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) \rightarrow$$

$$a(0)^2 + b(0) + c = f(x_{i-1}) \rightarrow c = f(x_{i-1}),$$

$$P_2(x_i) = f(x_i) \rightarrow$$

$$a(x_i - x_{i-1})^2 + b(x_i - x_{i-1}) + c = f(x_i).$$



# Solução do sistema linear

- Definindo

$$h_1 = x_i - x_{i-1},$$

$$h_2 = x_{i-1} - x_{i-2}.$$

- Sistema linear em termos das incógnitas $a$ e $b$

$$h_2^2 a - h_2 b = f(x_{i-2}) - f(x_{i-1}),$$

$$h_1^2 a + h_1 b = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

- Solução

$$a = \frac{1}{h_1(h_1+h_2)}(f(x_i)-(r+1)f(x_{i-1})+rf(x_{i-2}))$$

- sendo $r = h_1/h_2$ e

$$b = \frac{1}{h_1}(f(x_i) - f(x_{i-1})) - ah_1.$$

# Método de Muller

- Dois zeros do polinômio de grau $2$ em $v$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Para ser obtida a raiz mais próxima de $x_{i-1}$, o sinal na expressão deve ser escolhido de modo a tornar o numerador o menor possível.

- Em vista de $v = x - x_{i-1}$, a próxima estimativa da raiz $\xi$ de $f(x) = 0$ é

$$\boxed{x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{-b + \text{sinal}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

- Na próxima iteração, devem ser utilizados os três pontos mais próximos de $\xi$.

# Algoritmo: método de Muller

```
Algoritmo Muller
{ Objetivo: Calcular raiz pelo método de Muller }
parâmetros de entrada a, c, Toler, IterMax
  { limites do intervalo, tolerância e num. max. iterações }
parâmetros de saída Raiz, Iter, Erro
  { raiz, número gasto de iterações e condição de erro }
  { Avaliar a função f(x) em x = a, x = c e x = b }
  Fa ← f(a); Fc ← f(c); b ← (a + c)/2; Fb ← f(b)
  x ← b; Fx ← Fb; DeltaX ← c − a; Iter ← 0
  repita
    se (abs(DeltaX) < Toler e abs(Fx) < Toler)
    ou Iter ≥ IterMax então
      interrompa
    fim se
    Iter ← Iter + 1; h1 ← c − b; h2 ← b − a; r ← h1/h2; t ← x
    A ← (Fc − (r + 1) ∗ Fb + r ∗ Fa)/(h1 ∗ (h1 + h2))
    B ← (Fc − Fb)/h1 − A ∗ h1
    C = Fb; z ← (−B+sinal(B)∗ raiz2(B^2−4∗A∗C))/(2∗A)
    x ← b + z; DeltaX ← x − t; Fx ← f(x); { Avaliar f(x) }
    escreva Iter, a, b, c, x, Fx, DeltaX
    se x > b então
      a ← b; Fa ← Fb
    senão
      c ← b; Fc ← Fb
    fim se
    b ← x; Fb ← Fx
  fim repita
  Raiz ← x
  se abs(DeltaX) < Toler e abs(Fx) < Toler então
    Erro ← 0   senão   Erro ← 1
  fim se
fim algoritmo
```

# Exemplo

- Calcular com $\varepsilon \leq 0{,}001$, a raiz de

$$f(x) = 2x^3 - \cos(x + 1) - 3 = 0,$$

sabendo-se que $\xi \in [-1, 2]$.

Calculo de raiz de equacao pelo metodo de Muller

| iter | a | b | c | x | Fx | delta_x |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1.00000 | 0.50000 | 2.00000 | 0.86331 | -1.42476e+00 | 3.63315e-01 |
| 2 | 0.50000 | 0.86331 | 2.00000 | 1.05488 | -1.86933e-01 | 1.91564e-01 |
| 3 | 0.86331 | 1.05488 | 2.00000 | 1.07803 | -8.58214e-03 | 2.31508e-02 |
| 4 | 1.05488 | 1.07803 | 2.00000 | 1.07912 | -4.55606e-05 | 1.08694e-03 |
| 5 | 1.07803 | 1.07912 | 2.00000 | 1.07912 | -1.09542e-08 | 5.79471e-06 |

- Raiz da equação é $\xi \approx x_5 = 1{,}07912$.

# Exemplo

- Achar a raiz de

$$f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}4x^2 + 3\,\text{sen}(x)x = 0,$$

com $\varepsilon \leq 10^{-10}$, no intervalo $[10,\ 12]$.

Calculo de raiz de equacao pelo metodo de Muller

| iter | a | b | c | x | Fx | delta_x |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10.00000 | 11.00000 | 12.00000 | 11.74014 | -1.25090e-01 | 7.40141e-01 |
| 2 | 11.00000 | 11.74014 | 12.00000 | 11.74398 | 1.54925e-03 | 3.83681e-03 |
| 3 | 11.74014 | 11.74398 | 12.00000 | 11.74393 | -1.45315e-07 | -4.68547e-05 |
| 4 | 11.74014 | 11.74393 | 11.74398 | 11.74393 | 1.06581e-14 | 4.39453e-09 |
| 5 | 11.74393 | 11.74393 | 11.74398 | 11.74393 | 1.06581e-14 | 0.00000e+00 |

- Raiz da equação é $\xi \approx x_5 = 11{,}74393$.

# Ordem de convergência

- Método de Muller

$$|\epsilon_{k+1}| \approx \left|\frac{f'''(\xi)}{6f'(\xi)}\right|^{\frac{\gamma-1}{2}} |\epsilon_k|^{\gamma},$$

- $\gamma$ é a raiz positiva da equação

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \longrightarrow \gamma^3 - \gamma^2 - \gamma - 1 = 0.$$

- Ordem de convergência $\gamma \approx 1{,}8393$.

## Método de van Wijngaarden-Dekker-Brent

- Resultado da combinação da interpolação inversa quadrática e da bisseção.

- Implementados de forma a garantir que a raiz continue sempre isolada.

- Na interpolação quadrática, a forma analítica de um polinômio $P_2(x) \approx f(x) = y$ é determinada a partir de três pontos de coordenadas

  $[x_{i-2}, f(x_{i-2})], [x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ e $[x_i, f(x_i)]$.

- Para obter um valor aproximado de $f(t)$, basta avaliar $P_2(t)$.

## Método de van Wijngaarden-Dekker-Brent

- Na interpolação inversa quadrática, o polinômio interpolador de grau $2$, $\Pi_2(y) \approx f^{-1}(y) = x$, é construído a partir dos pontos de coordenadas

  $[f(x_{i-2}), x_{i-2}], [f(x_{i-1}), x_{i-1}]$ e $[f(x_i), x_i]$.

- Para ter um valor aproximado de $f^{-1}(z)$ é necessário avaliar $\Pi_2(z)$.
- Polinômio de Lagrange $\Pi_2(y)$

$$\begin{aligned}\Pi_2(y) &= x_{i-2}\frac{(y-f(x_{i-1})((y-f(x_i))}{(f(x_{i-2})-f(x_{i-1}))(f(x_{i-2})-f(x_i))}+\\ &+ x_{i-1}\frac{(y-f(x_{i-2}))(y-f(x_i))}{(f(x_{i-1})-f(x_{i-2}))(f(x_{i-1})-f(x_i))}+\\ &+ x_i\frac{(y-f(x_{i-2}))(y-f(x_{i-1}))}{(f(x_i)-f(x_{i-2}))(f(x_i)-f(x_{i-1}))}.\end{aligned}$$

- Como $y = f(x) \longrightarrow x = f^{-1}(y)$, então uma aproximação da raiz $\xi$ de $f(x) = 0$ é o ponto de abscissa correspondente à $f^{-1}(0)$.
- Esta aproximação é dada por $x = \Pi_2(0)$.

# Algoritmo: van Wijngaarden-Dekker-Brent

```
Algoritmo van Wijngaarden-Dekker-Brent
{ Objetivo: Calcular raiz por van Wijngaarden-Dekker-Brent }
parâmetros de entrada a, b, Toler, IterMax
parâmetros de saída Raiz, Iter, Erro
  Fa ← f(a); Fb ← f(b); { Avaliar a função f(x) em x = a e x = b }
  se Fa ∗ Fb > 0 então
    escreva "função não muda de sinal nos extremos do intervalo"
    abandone
  fim se
  c ← b; Fc ← Fb; Iter ← 0
  repita
    { Altera a, b e c para que b seja a melhor estimativa da raiz }
    se Fb ∗ Fc > 0 então  c ← a; Fc ← Fa; d ← b − a; e ← d  fim se
    se abs(Fc) < abs(Fb) então
      a ← b; b ← c; c ← a; Fa ← Fb; Fb ← Fc; Fc ← Fa
    fim se
    Tol ← 2 ∗ Toler ∗ max(abs(b), 1); z ← (c − b)/2
    escreva Iter, b, Fb, z
    { Teste de convergência }
    se abs(z) ≤ Tol ou Fb = 0 ou Iter ≥ IterMax então
      interrompa
    fim se
    { Escolha entre interpolação e bisseção }
    se abs(e) ≥ Tol e abs(Fa) > abs(Fb) então
      s ← Fb/Fa
      se a = c então  { Interpolação linear }
        p ← 2 ∗ z ∗ s; q ← 1 − s
      senão  { Interpolação inversa quadrática }
        q ← Fa/Fc; r ← Fb/Fc; p ← s∗(2∗z∗q∗(q−r)−(b−a)∗(r−1))
        q ← (q − 1) ∗ (r − 1) ∗ (s − 1)
      fim se
      se p > 0 então  q ← −q  senão  p ← −p  fim se
      se 2∗p < min(3∗z∗q−abs(Tol∗q), abs(e∗q)) então
        e ← d; d ← p/q
      senão  { Usa bisseção devido à falha na interpolação }
        d ← z; e ← z
      fim se
    senão  d ← z; e ← z  { Bisseção }
    fim se; a ← b; Fa ← Fb
    se abs(d) > Tol então b ← b + d  senão  b ← b + sinal(z) ∗ Tol  fim se
    Iter ← Iter + 1; Fb ← f(b); { Avaliar a função f(x) em x = b }
  fim repita
  Raiz ← b; se abs(z) ≤ Tol ou Fb = 0 então Erro ← 0, senão Erro ← 1, fim se
fim algoritmo
```

# Exemplo

- Calcular a menor raiz de

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0,$$

com $\varepsilon \leq 10^{-10}$, sabendo-se que $\xi \in [-5, -3]$.

```
Calculo de raiz pelo metodo de van Wijngaarden-Dekker-Brent
       iter        x              Fx                z
         0     -3.00000    -2.40000e+01    -1.00000e+00
         1     -3.28571    -2.47397e+01    -8.57143e-01
         2     -4.14286     1.12453e+01     4.28571e-01
         3     -3.87500    -7.85522e+00    -1.33929e-01
         4     -3.98516    -1.02599e+00    -7.88495e-02
         5     -4.00032     2.26777e-02     7.58292e-03
         6     -4.00000    -2.86125e-04    -1.63983e-04
         7     -4.00000    -7.80927e-08    -1.61940e-04
         8     -4.00000     0.00000e+00    -1.61940e-04
```

- Menor raiz de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ é $\xi = x_8 = -4$.

# Exemplo

- Calcular a raiz de

$$f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}4x^2 + 3\,\mathrm{sen}(x)x = 0,$$

com $\varepsilon \leq 10^{-10}$, no intervalo $[10,\ 12]$.

Calculo de raiz pelo metodo de van Wijngaarden-Dekker-Brent

| iter | x | Fx | z |
|---|---|---|---|
| 0 | 10.00000 | -6.32063e+00 | 1.00000e+00 |
| 1 | 12.00000 | 9.48337e+00 | -6.00061e-01 |
| 2 | 11.54358 | -5.94963e+00 | 2.28208e-01 |
| 3 | 11.71954 | -7.96853e-01 | 1.40231e-01 |
| 4 | 11.74464 | 2.34449e-02 | -1.25507e-02 |
| 5 | 11.74392 | -2.86520e-04 | 3.58711e-04 |
| 6 | 11.74393 | -1.00128e-07 | 3.54380e-04 |
| 7 | 11.74393 | 1.06581e-14 | -1.51400e-09 |

- Raiz procurada é $\xi \approx x_7 = 11{,}74393$.
- Convergência pelo método é garantida desde que haja uma raiz no intervalo.
- Combinação da bisseção com interpolação inversa quadrática.
- Esquema robusto e eficiente.

# Métodos baseados em tangente

- Bisseção.
- Aproximação de um arco da curva de $f(x)$ por polinômios lineares e quadráticos.
- Métodos baseados no cálculo da tangente à curva de $f(x)$.
- Método de Newton e de Schröder.

# Método de Newton

- Seja $\xi$ a única raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$.
- Seja $x_k$ uma aproximação desta raiz sendo que $x_0 \in [a, b]$.
- As derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ devem existir, ser contínuas e com sinal constante neste intervalo.

# Interpretação gráfica do método de Newton

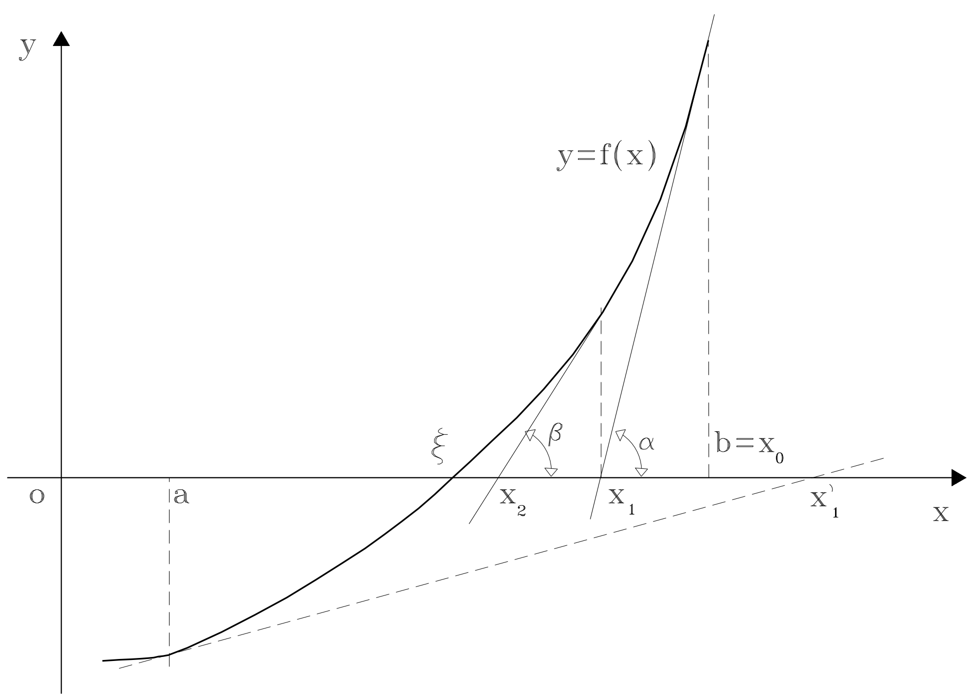
- Aproximar um arco da curva por uma reta tangente traçada a partir de um ponto da curva

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$\tan(\beta) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1) \longrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

- Fórmula de recorrência do método de Newton

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$



## Dedução analítica

- Seja

$$\xi = x_k + \delta_k,$$

tal que $\delta_k$ tenha um valor pequeno.

- Fazendo uma expansão em série de Taylor

$$f(\xi) = f(x_k + \delta_k) \approx f(x_k) + f'(x_k)\delta_k = 0 \rightarrow$$

$$\delta_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

- Substituindo esta correção

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

# Condição de convergência

- Pela figura, seqüência produzida convergirá para a raiz $\xi$ se o valor inicial for $x_0 = b$.
- Processo pode não convergir se $x_0 = a$, pois se terá $x'_1 \notin [a, b]$.
- Escolha do valor inicial de modo a garantir a convergência.
- **Teorema (Convergência)**
  Se $f(a)f(b) < 0$, e $f'(x)$ e $f''(x)$ forem não nulas e preservarem o sinal em $[a, b]$, então partindo-se da aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$ tal que

  $$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

  é possível construir uma seqüência $\{x_i\}$ que convirja para a raiz $\xi$ de $f(x) = 0$.
- Valor inicial $x_0$ deve ser um ponto no qual a função tenha o mesmo sinal de sua derivada segunda.
- Se $f''(x_0) > 0$, então $x_0$ é tal que $f(x_0) > 0$.
- Se $f''(x_0) < 0$, então $f(x_0) < 0$.

# Algoritmo: método de Newton

```
Algoritmo Newton
{ Objetivo: Calcular raiz pelo método de Newton }
parâmetros de entrada x0, Toler, IterMax
  { valor inicial, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída Raiz, Iter, Erro
  { raiz, número gasto de iterações e condição de erro }
  { Avaliar a função f(x) e sua derivada f'(x) em x = x0 }
  Fx ← f(x0); DFx ← f'(x0); x ← x0; Iter ← 0
  repita
    DeltaX ← −Fx/DFx; x ← x + DeltaX
    Fx ← f(x); DFx ← f'(x)
    { Avaliar a função f(x) e sua derivada f'(x) }
    Iter ← Iter + 1
    escreva Iter, x, Fx, DeltaX
    se (abs(DeltaX) < Toler e abs(Fx) < Toler)
    ou abs(DFx) = 0 ou Iter ≥ IterMax
       então interrompa
    fim se
  fim repita
  Raiz ← x
  se abs(Fx) < Toler então
    Erro ← 0
  senão
    Erro ← 1
  fim se
fim algoritmo
```

# Exemplo

- Determinar a maior raiz de

  $$P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0,$$

  com $\varepsilon \leq 10^{-5}$.

- Sabe-se que $\xi \in [2, 4]$, $f(2) < 0$ e $f(4) > 0$.

- As derivadas são $P'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 26x - 14$ e $P''(x) = 12x^2 + 12x - 26 > 0$, $2 \leq x \leq 4$.

- Valor inicial: $x_0 = 4$, pois $P(4)P''(4) > 0$.

Calculo de raiz de equacao pelo metodo de Newton

| iter | x | Fx | delta_x |
|---|---|---|---|
| 0 | 4.00000 | 1.44000e+02 | |
| 1 | 3.38462 | 3.64693e+01 | -6.15385e-01 |
| 2 | 3.08526 | 6.40563e+00 | -2.99358e-01 |
| 3 | 3.00555 | 3.90611e-01 | -7.97036e-02 |
| 4 | 3.00003 | 1.80793e-03 | -5.52830e-03 |
| 5 | 3.00000 | 3.93538e-08 | -2.58264e-05 |
| 6 | 3.00000 | 0.00000e+00 | -5.62196e-10 |

- Raiz da equação é $\xi = x_6 = 3$.

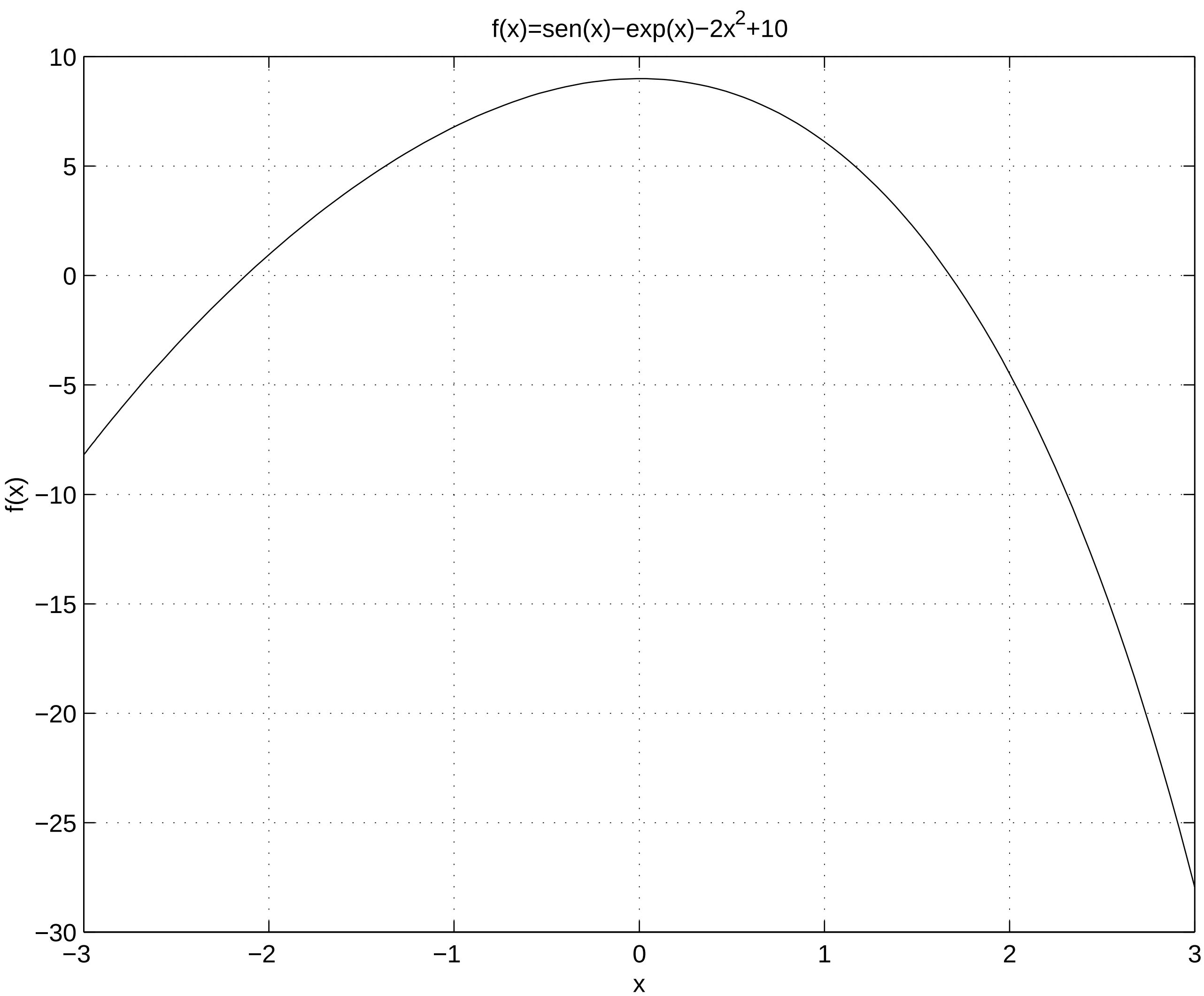
# Exemplo

- Calcular uma raiz positiva de

$$f(x) = \text{sen}(x) - e^x - 2x^2 + 10 = 0,$$

com $\varepsilon \leq 10^{-5}$.

- Esboço da curva: $\xi \in [1, 2]$, $f(1) > 0$ e $f(2) < 0$.



# Cálculo da raiz

- Derivadas

$$f'(x) = \cos(x) - e^x - 4x,$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen}(x) - e^x - 4 < 0 \;\forall\, x \in [1,2].$$

- Valor inicial: $x_0 = 2$ porque $f(2)f''(2) > 0$.

```
Calculo de raiz de equacao pelo metodo de Newton
  iter       x            Fx              delta_x
    0      2.00000    -4.47976e+00
    1      1.71656    -4.69166e-01    -2.83436e-01
    2      1.67926    -7.29735e-03    -3.73038e-02
    3      1.67866    -1.85632e-06    -5.98788e-04
    4      1.67866    -1.20792e-13    -1.52398e-07
```

- Raiz $\xi \approx x_4 = 1{,}67866$.

# Ordem de convergência

- Considere

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

- Erro da $k$-ésima iteração em vista de $\epsilon_k = x_k - \xi$

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

- Expandindo $f(x_k)$ em série de Taylor em torno da raiz $\xi$

$$f(x_k) = f(\xi) + \epsilon_k f'(\xi) + \epsilon_k^2 \frac{f''(\xi)}{2} + \cdots$$

$$f'(x_k) = f'(\xi) + \epsilon_k f''(\xi) + \cdots$$

- Substituindo as duas expressões em $\epsilon_{k+1}$

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k - \frac{\epsilon_k f'(\xi) + \epsilon_k^2 \frac{f''(\xi)}{2} + \cdots}{f'(\xi) + \epsilon_k f''(\xi) + \cdots}$$

$$\epsilon_{k+1} = \frac{\epsilon_k f'(\xi) + \epsilon_k^2 f''(\xi) + \cdots - \epsilon_k f'(\xi) - \epsilon_k^2 \frac{f''(\xi)}{2} - \cdots}{f'(\xi) + \epsilon_k f''(\xi) + \cdots}$$

# Convergência quadrática

- Ordem de convergência

$$|\epsilon_{k+1}| \approx \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}|\epsilon_k|^2.$$

- Método de Newton tem convergência quadrática.

- Nas proximidades da raiz, o número de dígitos corretos da estimativa da raiz praticamente dobra a cada iteração.

# Método de Schröder

- Método de Newton apresenta convergência linear quando uma raiz tem multiplicidade $m > 1$.

- Pela fórmula

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

- à medida que $f(x_k) \to 0$, $f'(x_k) \to 0$.

- Modificação simples permite o cálculo de uma raiz de multiplicidade $m$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \ k = 0, 1, 2, \ldots}$$

- Mantém a convergência quadrática.

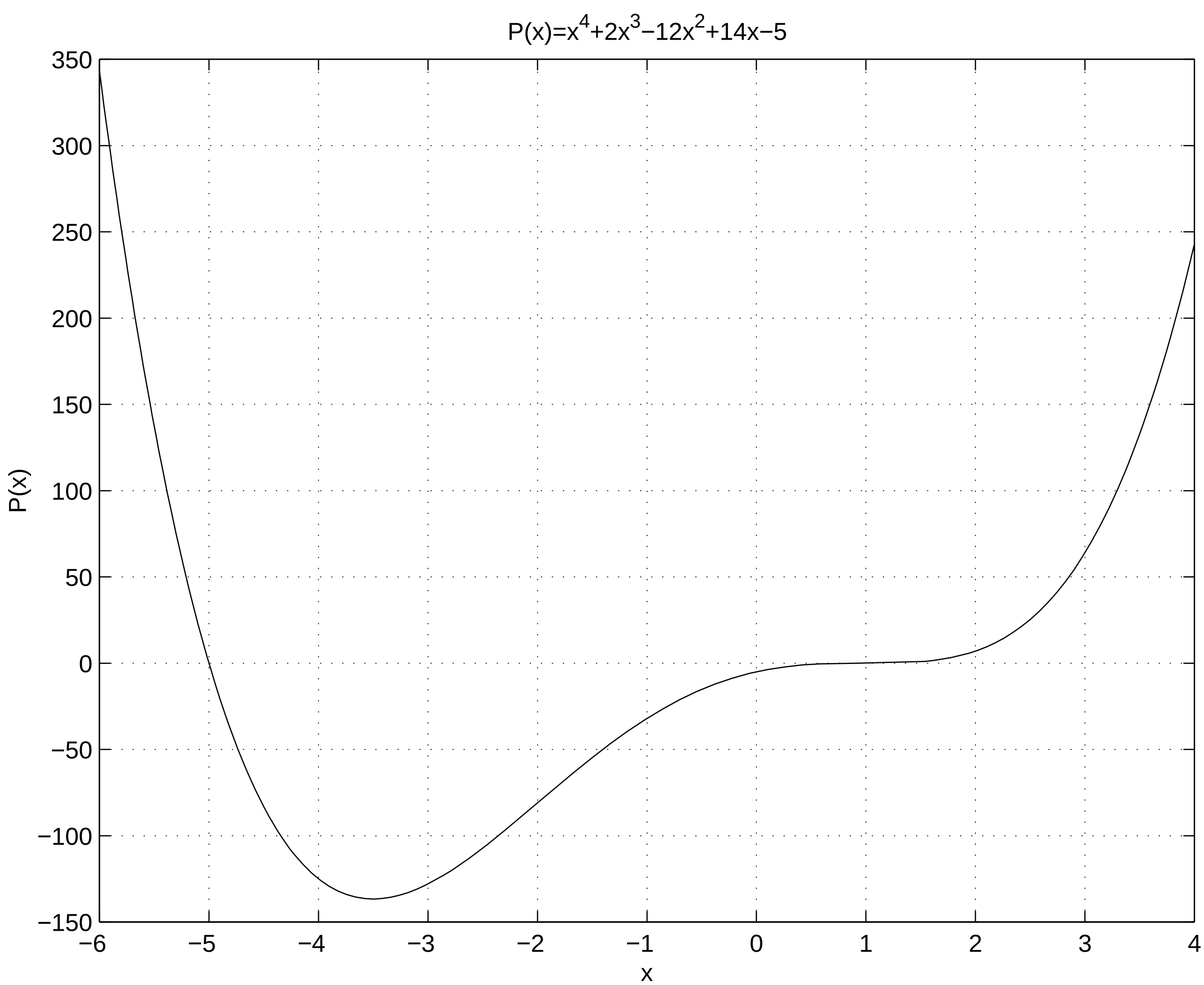
# Exemplo

- Calcular a raiz de

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 = 0$$

de multiplicidade $m = 3$, com tolerância $\varepsilon \leq 10^{-5}$.

- Esboço da curva: $\xi \in [0, 2]$.



# Cálculo da raiz

- Derivadas

$$P'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14,$$

$$P''(x) = 12x^2 + 12x - 24 > 0 \;\forall\; x > 1.$$

- Valor inicial: $x_0 = 2$ porque $P(2)P''(2) > 0$.

```
Calculo de raiz de equacao pelo metodo de Schroder
   iter       x            Fx               delta_x
     0      2.00000     7.00000e+00
     1      1.04545     5.67755e-04    -9.54545e-01
     2      1.00011     8.80540e-12    -4.53409e-02
     3      1.00000     0.00000e+00    -1.13646e-04
     4      1.00000     0.00000e+00    -0.00000e+00
```

- Raiz $\xi = x_4 = 1$.

- Método de Newton gasta 27 iterações para calcular esta raiz com a mesma tolerância $\varepsilon \leq 10^{-5}$.

# Comparação dos métodos

- Estudo comparativo do desempenho de métodos utilizando uma série de equações está longe de ser perfeito.
- Existe uma dependência do resultado na escolha dessas equações.
- Determinação da ordem de convergência é mais adequada.
- Não é baseada em nenhum empirismo.
- Interesse em verificar o desempenho dos métodos estudados.

# Equações de teste

- Cinco equações e intervalo que isola a raiz

$$f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0,\ \xi \in [0, 3].$$

$$f_2(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)^3 = 0,\ \xi \in [0, 5].$$

$$f_3(x) = 5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20 = 0,\ \xi \in [-5, 5].$$

$$f_4(x) = \mathrm{sen}(x)x + 4 = 0,\ \xi \in [1, 5].$$

$$f_5(x) = (x - 3)^5 \log_e(x) = 0,\ \xi \in [2, 5].$$

- Utilizados o mesmo número máximo de iterações $(500)$, tolerância $(\varepsilon = 10^{-10})$ e critério de parada.
- Método de van Wijngaarden-Dekker-Brent usa um critério ligeiramente diferente.
- Para o método de Newton, $x_0$ foi escolhido como o ponto médio do intervalo dado.

$$f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15$$

| método | raiz | iter | erro | $t_{rel}$ |
|---|---:|---:|---|---:|
| bisseção | 1,49288 | 38 | | 1,00 |
| secante | −1,30038 | 9 | sim | 0,30 |
| regula falsi | 1,49288 | 78 | | 2,06 |
| pégaso | 1,49288 | 11 | | 0,36 |
| Muller | 1,49288 | 5 | | 0,25 |
| W-D-Brent | 1,49288 | 9 | | 0,49 |
| Newton | 1,49288 | 4 | | 0,21 |

$$f_2(x) = (x+3)(x+1)(x-2)^3$$

| método | raiz | iter | erro | $t_{rel}$ |
|---|---|---|---|---|
| bisseção | 1,99999 | 36 | | 1,00 |
| secante | 1,99999 | 46 | | 1,29 |
| regula falsi | 1,82356 | 500 | sim | 13,41 |
| pégaso | 2,00000 | 68 | | 1,93 |
| Muller | 2,00001 | 500 | sim | 16,66 |
| W-D-Brent | 2,00001 | 52 | | 2,53 |
| Newton | 2,00000 | 65 | | 3,03 |
| Schröder | 2,00000 | 3 | | 0,19 |

$$f_3(x) = 5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20$$

| método | raiz | iter | erro | $t_{rel}$ |
|---|---|---|---|---|
| bisseção | −0,92956 | 42 | | 1,00 |
| secante | −0,92956 | 22 | | 0,57 |
| regula falsi | 0,69872 | 500 | sim | 11,60 |
| pégaso | −0,92956 | 20 | | 0,54 |
| Muller | −0,92956 | 33 | | 1,04 |
| W-D-Brent | −0,92956 | 8 | | 0,41 |
| Newton | −0,92956 | 11 | | 0,50 |

## $f_4(x) = \text{sen}(x)x + 4$

| método | raiz | iter | erro | $t_{rel}$ |
|---|---|---|---|---|
| bisseção | 4,32324 | 37 | | 1,00 |
| secante | 4,32324 | 8 | | 0,28 |
| regula falsi | 4,32324 | 10 | | 0,34 |
| pégaso | 4,32324 | 8 | | 0,30 |
| Muller | 4,32324 | 7 | | 0,38 |
| W-D-Brent | 4,32324 | 7 | | 0,56 |
| Newton | 4,32324 | 6 | | 0,32 |

## $f_5(x) = (x-3)^5 \log_e(x)$

| método | raiz | iter | erro | $t_{rel}$ |
|---|---|---|---|---|
| bisseção | 3,00000 | 35 | | 1,00 |
| secante | 3,00000 | 138 | | 3,91 |
| regula falsi | 2,67554 | 500 | sim | 13,97 |
| pégaso | 3,00000 | 188 | | 5,55 |
| Muller | 3,01291 | 500 | sim | 19,16 |
| W-D-Brent | 3,00000 | 80 | | 5,04 |
| Newton | 3,00000 | 95 | | 5,56 |
| Schröder | 3,00000 | 4 | | 0,30 |

# Observações

- Bisseção mostrou sua robustez, pois não falhou, apesar de não ser o mais eficiente.
- Secante, embora seja rápida, encontrou uma raiz fora do intervalo dado.
- Regula falsi apresentou uma convergência muito lenta e falhou três vezes.
- Pégaso, além de ser robusto, foi competitivo com relação ao sofisticado van Wijngaarden-Dekker-Brent.
- Muller não foi robusto, embora eficiente, pois falhou nos casos onde a raiz possui multiplicidade.
- van Wijngaarden-Dekker-Brent foi robusto, mas também foi menos eficiente na presença de multiplicidade.
- Schröder é uma efetiva modificação do método de Newton para evitar problemas com raízes de multiplicidade.