5. Integração numérica

5.1 Fórmulas de Newton-Cotes.

5.2 Quadratura de Gauss-Legendre.

5.3 Comparação dos métodos de integ. simples.

5.4 Integ. dupla pelas fórmulas de Newton-Cotes.

5.5 Integ. dupla via fórmulas de Gauss-Legendre.

5.6 Comparação dos métodos para integ. dupla.

5.7 Estudos de caso:

- Distribuição de probabilidade.
- Integral imprópria.

5.8 Exercícios.

Fórmulas de Newton-Cotes

- Função $f(x)$ aproximada por um polinômio.
- Por exemplo, polinômio de Gregory-Newton

$$f(x) \approx P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j),$$

$$u_x = \frac{x - x_0}{h}.$$

Regra do trapézio

- Para $n = 1$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x)\,dx.$$

- Mudança de variável de $x \to u_x$ e $u_x \to u$

$$x = a = x_0 \longrightarrow u = \frac{x_0 - x_0}{h} \rightsquigarrow u = 0,$$

$$x = b = x_1 \longrightarrow u = \frac{x_1 - x_0}{h} = \frac{h}{h} \rightsquigarrow u = 1.$$

- Usando a notação $y_i = f(x_i)$

$$I_1 = \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x)\,dx = \int_0^1 (y_0 + u\Delta y_0) h\,du.$$

- Integrando, analiticamente, o polinômio

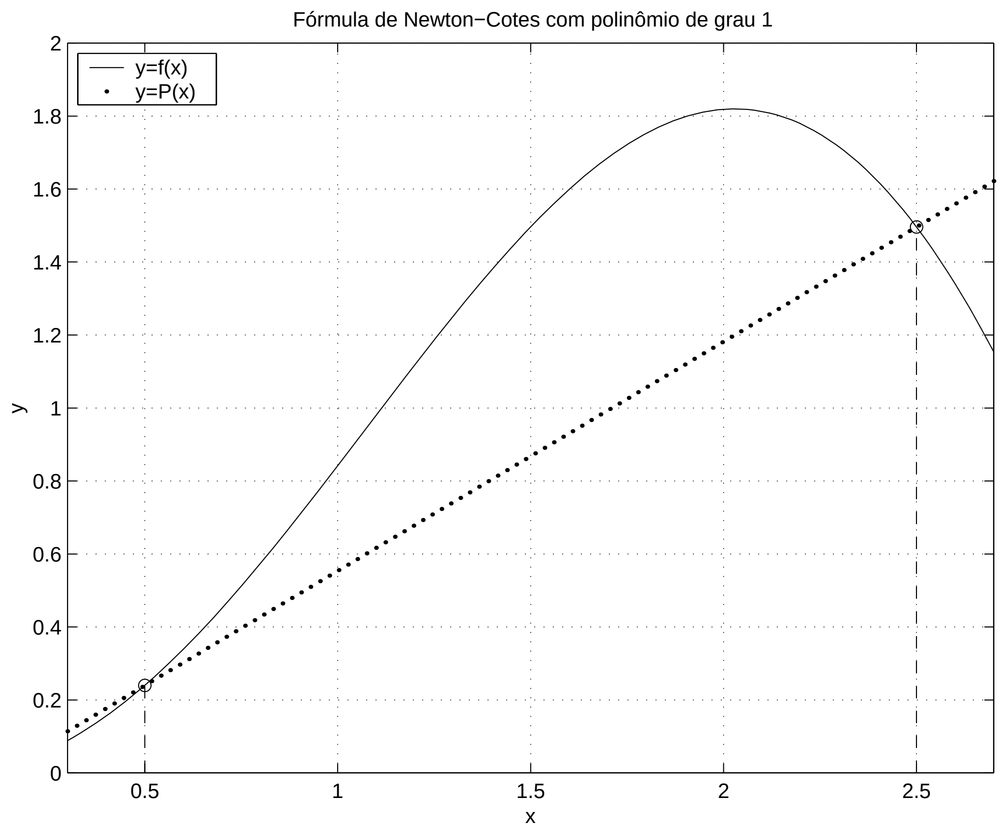
$$I_1 = h\left[y_0 u + \frac{u^2}{2}\Delta y_0\right]\Bigg|_0^1 = h\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}\right),$$

$$I_1 = \frac{h}{2}\left(2y_0 + y_1 - y_0\right),$$

$$\boxed{I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)}.$$

Representação geométrica da integração

- Aproximação da função $f(x)$ por um polinômio interpolador $P(x)$ de grau 1



Exemplo

- Calcular $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$ pela regra do trapézio.
- Polinômio de grau 1 passa pelos pontos com abscissas $a = x_0 = 1$ e $b = x_1 = 4$

$$h = 4 - 1 = 3,$$

$$I_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right) \rightsquigarrow$$

$$I_1 = 1{,}875.$$

Regra do 1/3 de Simpson

- Aproximando $f(x)$ por polinômio $P_2(x)$ de grau 2

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_2} P_2(x)\,dx.$$

- Mudança de variável

$$x = a = x_0 \longrightarrow u = \frac{x_0 - x_0}{h} \rightsquigarrow u = 0,$$

$$x = b = x_2 \longrightarrow u = \frac{x_2 - x_0}{h} = \frac{2h}{h} \rightsquigarrow u = 2.$$

- Equação de integração

$$I_2 = \int_{a=x_0}^{b=x_2} P_2(x)dx = \int_0^2 \left(y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u^2 - u}{2}\Delta^2 y_0\right) h du.$$

- Integrando, analiticamente, o polinômio

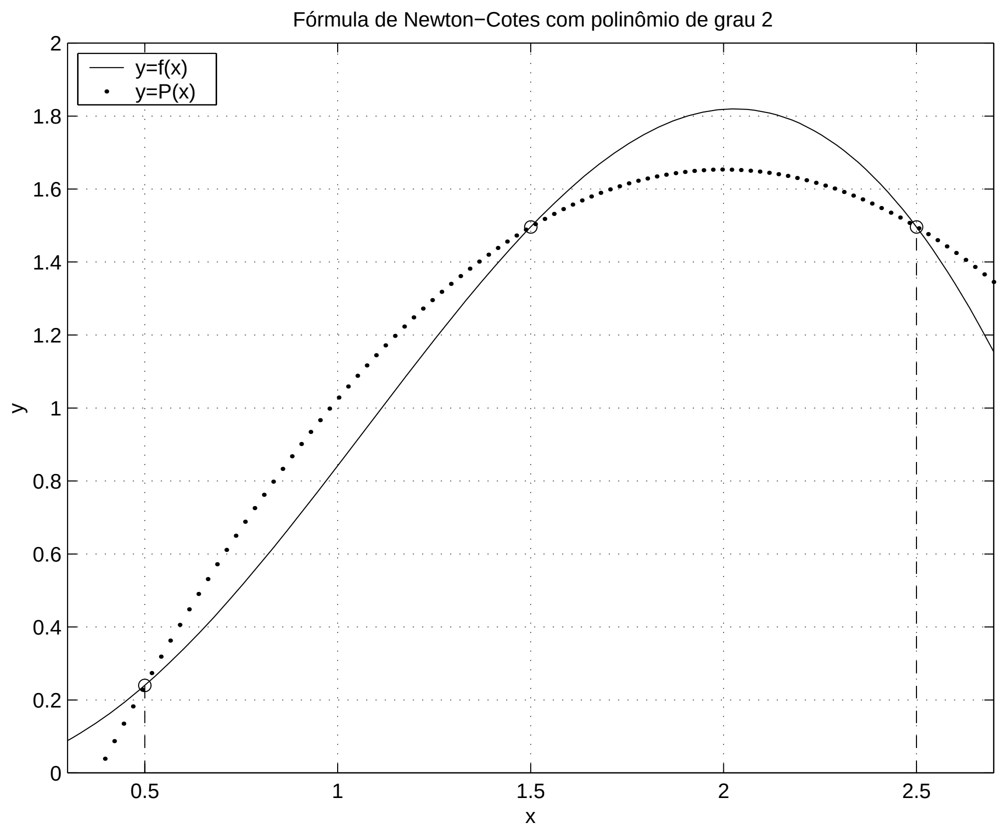
$$I_2 = h\left[y_0 u + \frac{u^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4}\right)\Delta^2 y_0\right]\Bigg|_0^2$$

$$I_2 = h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right],$$

$$\boxed{I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}.$$

Representação geométrica da integração

- Aproximação da função $f(x)$ por um polinômio interpolador $P(x)$ de grau 2



Exemplo

- Calcular $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$, usando a regra do 1/3 de Simpson.
- Para construir um polinômio de grau 2 são necessários 3 pontos.
- As abscissas por onde o polinômio irá passar são $a = x_0 = 1$, $x_1 = 2{,}5$ e $b = x_2 = 4$

$$h = \frac{4-1}{2} = 1{,}5;$$

$$I_2 = \frac{1{,}5}{3}\left(\frac{1}{1} + 4\frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{4}\right) \leadsto$$

$$I_2 = 1{,}425.$$

Regra dos 3/8 de Simpson

- Aproximando $f(x)$ por um polinômio de grau 3

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_3} P_3(x)\,dx.$$

- Mudança de variável

$$x = a = x_0 \longrightarrow u = \frac{x_0 - x_0}{h} \leadsto u = 0,$$

$$x = b = x_3 \longrightarrow u = \frac{x_3 - x_0}{h} = \frac{3h}{h} \leadsto u = 3.$$

- Equação de integração

$$I_3 = \int_{a=x_0}^{b=x_3} P_3(x)\,dx,$$

$$I_3 = \int_0^3 \left(y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u^2 - u}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{u^3 - 3u^2 + 2u}{6}\Delta^3 y_0 \right) h\,du.$$

Regra dos 3/8 de Simpson cont.

- Integrando, analiticamente, o polinômio

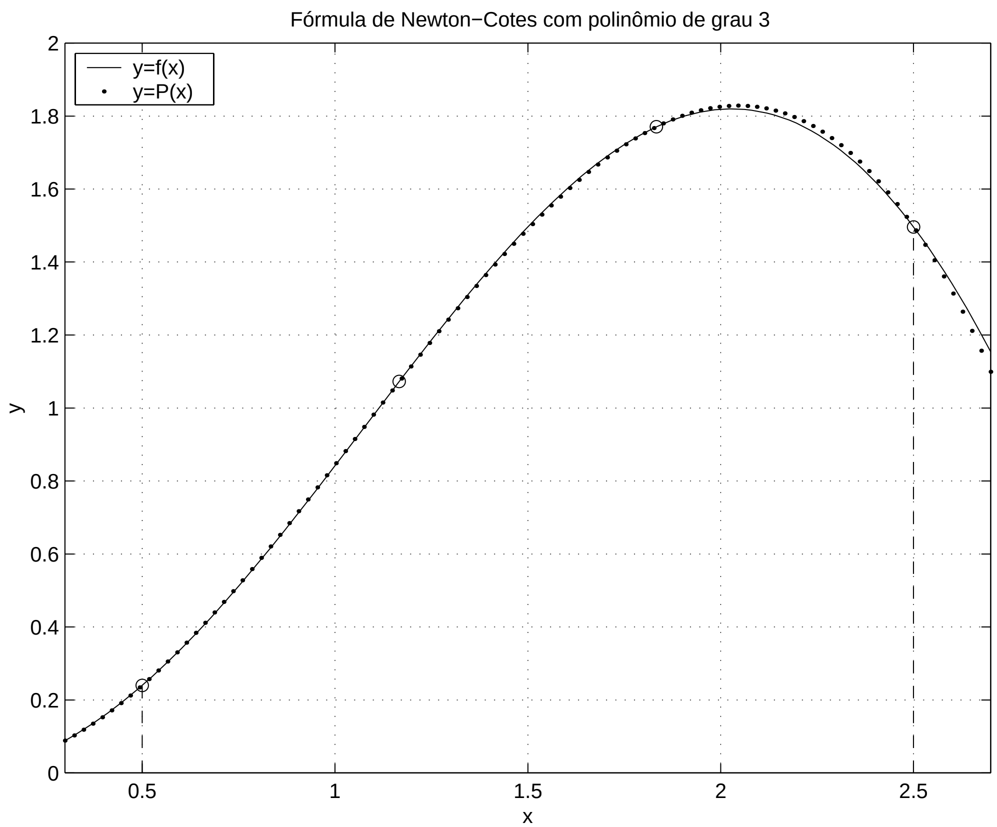
$$I_3 = h\left[y_0 u + \frac{u^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{u^4}{24} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{6}\right)\Delta^3 y_0\right]\Bigg|_0^3,$$

$$I_3 = h\left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right],$$

$$\boxed{I_3 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)}.$$

Representação geométrica da integração

- Aproximação da função $f(x)$ por um polinômio interpolador $P(x)$ de grau 3



Exemplo

- Calcular $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$ pela regra dos 3/8 de Simpson.
- São necessários 4 pontos para construir um polinômio de grau 3.
- As abscissas são $a = x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $b = x_3 = 4$

$$h = \frac{4-1}{3} = 1 \to I_3 = \frac{3 \cdot 1}{8}\left(\frac{1}{1} + 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \rightsquigarrow$$

$$I_3 = 1{,}4063.$$

- Sendo $\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = \log_e(x)\Big|_1^4 = \log_e(4) \approx 1{,}3863.$
- Resultado da integração melhora à medida que o grau do polinômio interpolador aumenta

n	I_n	$\lvert I_n - \log_e(4)\rvert$
1	1,8750	0,4887
2	1,4250	0,0387
3	1,4063	0,0200

.

Fórmula geral de Newton-Cotes

- Fórmulas de Newton-Cotes são da forma geral

$$\boxed{I_n = \frac{nh}{d_n} \sum_{i=0}^{n} c_i y_i},$$

- c_i: coeficientes de Cotes.

- Valores de d_n e dos coeficientes de Cotes

n	d_n	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
1	2	1	1							
2	6	1	4	1						
3	8	1	3	3	1					
4	90	7	32	12	32	7				
5	288	19	75	50	50	75	19			
6	840	41	216	27	272	27	216	41		
7	17280	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751	
8	28350	989	5888	−928	10496	−4540	10496	−928	5888	989

- Uso de um polinômio de grau superior a 3 para integração numérica.

- O resultado é melhorado pela subdivisão do intervalo de integração e aplicação de uma fórmula de Newton-Cotes em cada subintervalo.

Regra do trapézio composta

- Integração baseada em polinômio de grau 1

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1).$$

- Subdividir $[a, b]$ em m subintervalos iguais.

- Aplicar a equação acima a cada 2 pontos

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x)\,dx \approx I_1,$$

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \frac{h}{2}(y_2 + y_3) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{m-1} + y_m)$$

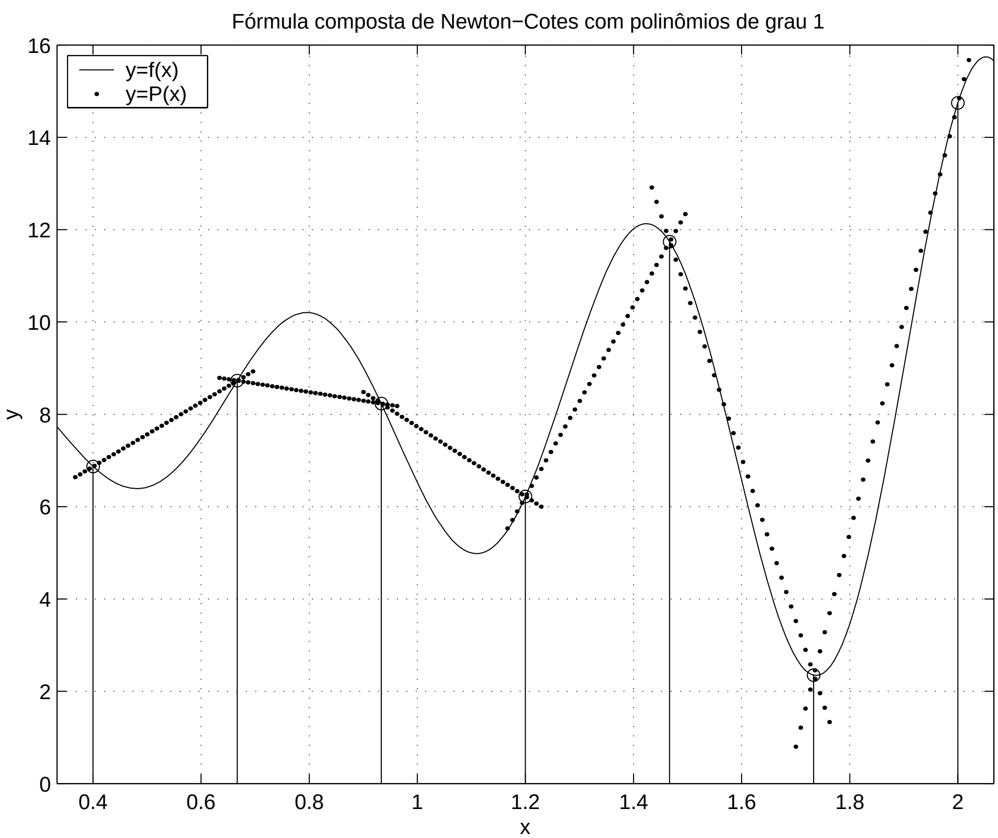
$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{m-1} + y_m),$$

$$\boxed{I_1 = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m} c_i y_i}.$$

- Qualquer valor de número de subintervalos m.

Interpretação geométrica

- Integração da função $f(x)$ utilizando 6 polinômios interpoladores $P(x)$ de grau 1



Exemplo

- Calcular $\int_1^3 x^3 \log_e(x)\ dx$ pela regra do trapézio composta com $m = 4$ subintervalos.
- Valor de $h = \dfrac{b-a}{m} = \dfrac{3-1}{4} \rightarrow h = 0{,}5$.
- Dispositivo prático formado por quatro colunas,
- com $i = 0, 1, \ldots,\ m,\ x_i = a, a+h, a+2h, \ldots, b$, $y_i = f(x_i)$ e c_i sendo os coeficientes de Cotes

i	x_i	y_i	c_i
0	1,0	0,0000	1
1	1,5	1,3684	2
2	2,0	5,5452	2
3	2,5	14,3170	2
4	3,0	29,6625	1

,

$$I_1 = \frac{0{,}5}{2}(0{,}0000 + 2(1{,}3684 + 5{,}5452 + 14{,}3170) + 29{,}6625) \rightsquigarrow I_1 = 18{,}0309.$$

Exemplo

- Calcular $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{-\cos(x)}}{\sqrt{2x+4}}\,dx$ pela regra do trapézio composta com $m = 5$ subintervalos.

- Valor de $h = \dfrac{b-a}{m} = \dfrac{2-0}{5} \to h = 0{,}4$.

i	x_i	y_i	c_i
0	0,0	0,1839	1
1	0,4	0,1817	2
2	0,8	0,2105	2
3	1,2	0,2751	2
4	1,6	0,3837	2
5	2,0	0,5360	1

,

$$I_1 = \frac{0{,}4}{2}(0{,}1839 + 2(0{,}1817 + 0{,}2105 + 0{,}2751 +$$

$$0{,}3837) + 0{,}5360) \leadsto I_1 = 0{,}5644.$$

Regra do 1/3 de Simpson composta

- Integração baseada em polinômio de grau 2

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

- Subdividir $[a, b]$ em m (múltiplo de 2) subintervalos iguais.

- Aplicar a equação acima a cada 3 pontos

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x)\, dx \approx I_2,$$

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m),$$

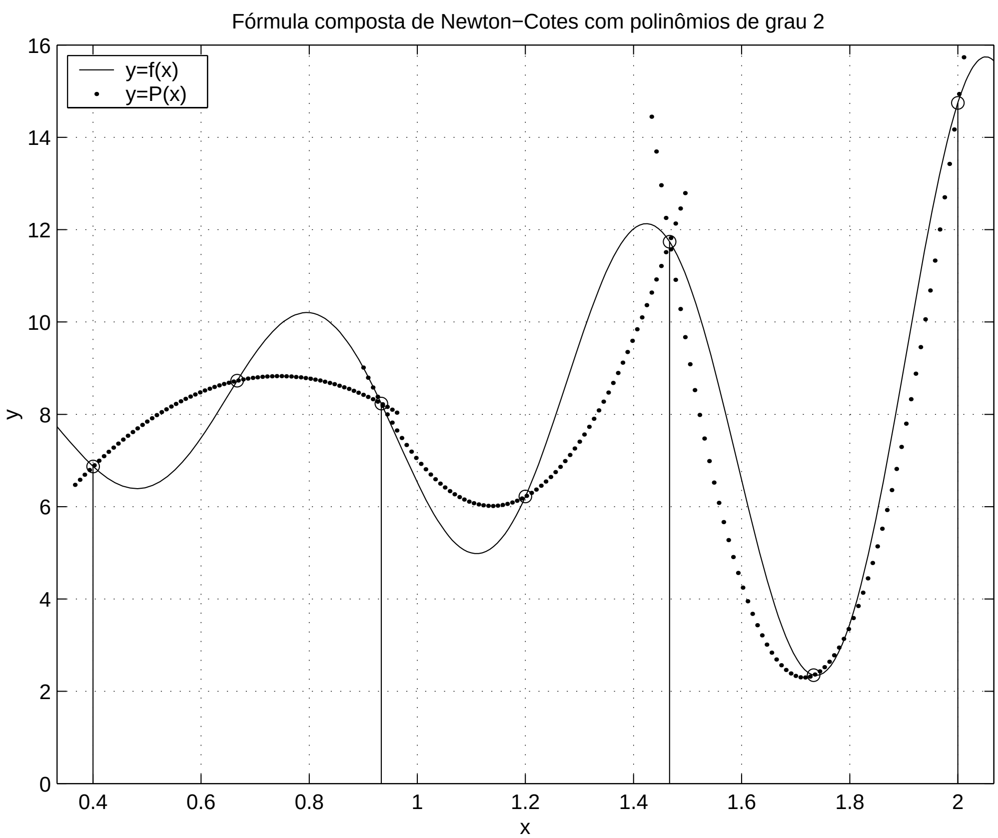
$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m),$$

$$\boxed{I_2 = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m} c_i y_i},$$

- Número de subintervalos m deve ser múltiplo de 2, que é o grau do polinômio interpolador usado.

Interpretação geométrica

- Integração da função $f(x)$ utilizando 3 polinômios interpoladores $P(x)$ de grau 2



Exemplo

- Verificar que $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$, usando a regra do 1/3 de Simpson composta com $h = 0{,}25$.
- Valor de $m = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0{,}25} \to m = 4$ (múltiplo de 2).
- Dispositivo prático

i	x_i	y_i	c_i
0	0,00	1,0000	1
1	0,25	0,9412	4
2	0,50	0,8000	2
3	0,75	0,6400	4
4	1,00	0,5000	1

,

$$I_2 = \frac{0{,}25}{3}(1{,}0000 + 4(0{,}9412 + 0{,}6400) +$$

$$2(0{,}8000) + 0{,}5000) \leadsto I_2 = 0{,}7854;$$

$$4 \cdot I_2 = 3{,}1416 \approx \pi.$$

Exemplo

- Calcular $\int_0^3 \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$, usando a regra do 1/3 de Simpson com $m = 6$ (múltiplo de 2) subintervalos.

- Valor de $h = \frac{b-a}{m} = \frac{3-0}{6} \to h = 0{,}5$.

i	x_i	y_i	c_i
0	0,0	0,0000	1
1	0,5	0,3398	4
2	1,0	0,8210	2
3	1,5	1,8830	4
4	2,0	4,3679	2
5	2,5	10,3065	4
6	3,0	24,6997	1

,

$$I_2 = \frac{0{,}5}{3}(0{,}0000 + 4(0{,}3398 + 1{,}8830 + 10{,}3065) + 2(0{,}8210 + 4{,}3679) + 24{,}6997) \leadsto$$

$$I_2 = 14{,}1991.$$

Regra dos 3/8 de Simpson composta

- Integração baseada em polinômio de grau 3

$$I_3 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3).$$

- Subdividir $[a, b]$ em m (múltiplo de 3) subintervalos iguais.

- Aplicar a equação acima a cada 4 pontos

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x)\,dx \approx I_3,$$

$$I_3 = \frac{3h}{8}(y_0+3y_1+3y_2+y_3) + \frac{3h}{8}(y_3+3y_4+3y_5+y_6) + \cdots + \frac{3h}{8}(y_{m-3}+3y_{m-2}+3y_{m-1}+y_m),$$

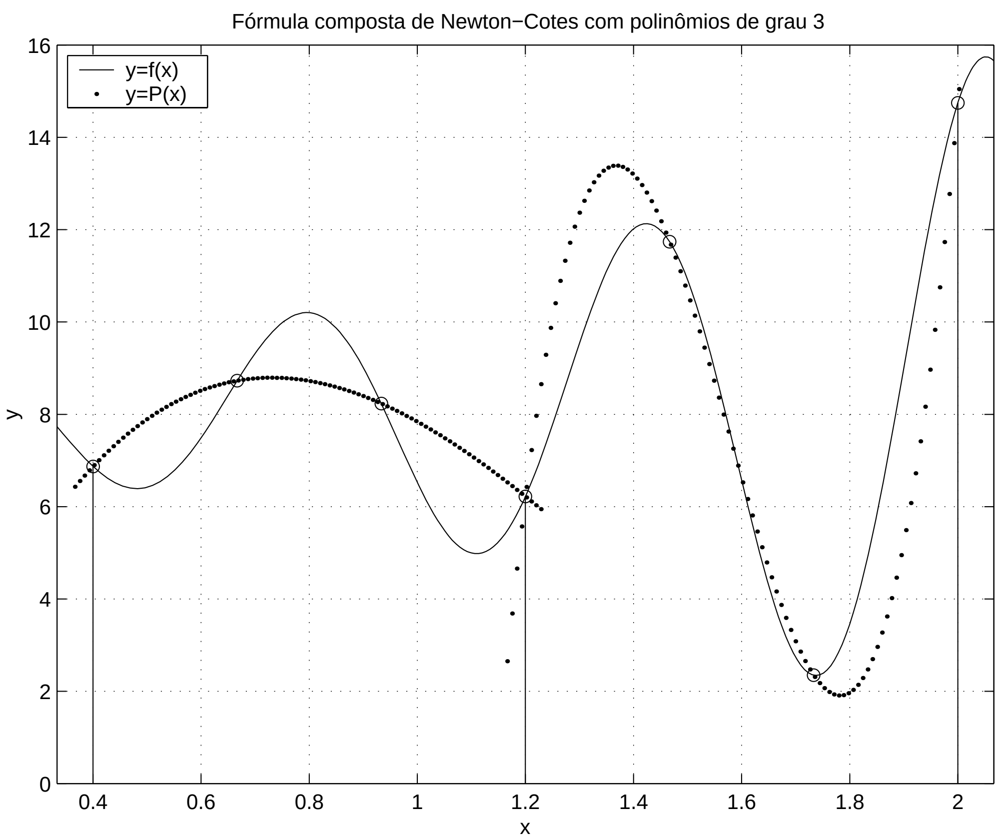
$$I_3 = \frac{3h}{8}(y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5+2y_6 + \cdots + 2y_{m-3}+3y_{m-2}+3y_{m-1}+y_m),$$

$$\boxed{I_3 = \frac{3h}{8}\sum_{i=0}^{m} c_i y_i}.$$

- Número de subintervalos m deve ser múltiplo de 3, que é o grau do polinômio interpolador usado.

Interpretação geométrica

- Integração da função $f(x)$ utilizando 2 polinômios interpoladores $P(x)$ de grau 3



Exemplo

- Calcular $\int_1^4 \log_e \left(x^3 + \sqrt{e^x + 1}\right) dx$ pela regra dos 3/8 de Simpson com $m = 6$ (múltiplo de 3) subintervalos.
- Valor de $h = \dfrac{b-a}{m} = \dfrac{4-1}{6} \to h = 0{,}5$.

i	x_i	y_i	c_i
0	1,0	1,0744	1
1	1,5	1,7433	3
2	2,0	2,3884	3
3	2,5	2,9578	2
4	3,0	3,4529	3
5	3,5	3,8860	3
6	4,0	4,2691	1

,

$$I_3 = \frac{3 \cdot 0{,}5}{8}(1{,}0744 + 3(1{,}7433 + 2{,}3884 +$$

$$3{,}4529 + 3{,}8860) + 2 \cdot 2{,}9578 + 4{,}2691) \leadsto$$

$$I_3 = 8{,}5633.$$

Exemplo

- Calcular $\int_0^{2,7} \frac{x + \text{sen}(x)}{1+\cos(x)}\,dx$, usando a regra dos 3/8 de Simpson com passo de integração $h = 0{,}3$.

- Valor de $m = \frac{b-a}{h} = \frac{2{,}7-0}{0{,}3} \rightarrow m = 9$(múltiplo de 3).

i	x_i	y_i	c_i
0	0,0	0,0000	1
1	0,3	0,3046	3
2	0,6	0,6380	3
3	0,9	1,0381	2
4	1,2	1,5650	3
5	1,5	2,3325	3
6	1,8	3,5894	2
7	2,1	5,9844	3
8	2,4	11,7113	3
9	2,7	32,6014	1

,

$$I_3 = \frac{3 \cdot 0{,}3}{8}(0{,}0000 + 3(0{,}3046 + 0{,}6380 + 1{,}5650 + 2{,}3325 + 5{,}9844 + 11{,}7113) + 2(1{,}0381 + 3{,}5894) + 32{,}6014) \rightsquigarrow I_3 = 12{,}3147.$$

Erro de integração da regra do trapézio

- Erro de truncamento de um polinômio de Gregory-Newton de grau n

$$T_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!},\ x_0 < \theta < x_n.$$

- Regra do trapézio (polinômio de grau $n = 1$)

$$T_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\theta_1)}{2!},\ x_0 < \theta_1 < x_1.$$

- Erro de integração $E_{1,1}$ cometido ao usar $P_1(x)$

$$E_{1,1} = \int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\theta_1)}{2}\,dx.$$

- Mudança de variável de x para $u = u_x = \dfrac{x - x_0}{h}$

$$E_{1,1} = \int_0^1 (hu)(h(u-1))\frac{f''(\theta_1)}{2}h\,du,$$

$$E_{1,1} = \frac{h^3 f''(\theta_1)}{2}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \leadsto E_{1,1} = -\frac{h^3 f''(\theta_1)}{12}.$$

Erro de integração da regra do trapézio cont.

- Erro de integração global

$$E_1 = \sum_{i=1}^{m} E_{1,i} = -\frac{h^3}{12}(f''(\theta_1) + f''(\theta_2) + \cdots + f''(\theta_m)),$$

- θ_i determinado em cada um dos m subintervalos.
- Se $f''(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então existe algum valor de $x = \theta \in [a, b]$ para o qual o somatório é igual a $mf''(\theta)$.
- Passo de integração

$$h = (b - a)/m.$$

- Erro global de integração da regra do trapézio

$$E_1 = -\frac{h^3 m f''(\theta)}{12} = -\frac{(b-a)^3}{m^3}\frac{m f''(\theta)}{12}, \ a < \theta < b,$$

$$\boxed{E_1 = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\theta), \ a < \theta < b}.$$

Erro de integração das regras de Simpson

- Regra do 1/3 de Simpson

$$\boxed{E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{iv}(\theta),\ a < \theta < b}.$$

- Regra dos 3/8 de Simpson

$$\boxed{E_3 = -\frac{(b-a)^5}{80m^4} f^{iv}(\theta),\ a < \theta < b}.$$

- Valor de θ é o ponto no intervalo $[a, b]$, no qual a derivada de $f(x)$ apresenta o maior valor em módulo.

- Equações fornecem a cota máxima do erro de integração.

Exemplo

- Calcular $\int_1^3 \left(4x^3 + 3x^2 + x + 1\right) dx$, utilizando a regra do 1/3 de Simpson com $m = 2$ subintervalos.

  $$h = \frac{b-a}{m} = \frac{3-1}{2} \to h = 1,$$

i	x_i	y_i	c_i
0	1	9	1
1	2	47	4
2	3	139	1

  ,

  $$I_2 = \frac{1}{3}(9 + 4 \cdot 47 + 139) \rightsquigarrow I_2 = 112.$$

- Erro de integração

  $$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 1,\ f'(x) = 12x^2 + 6x + 1,$$

  $$f''(x) = 24x + 6,\ f'''(x) = 24,$$

  $$f^{iv}(x) = 0 \to E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{iv}(\theta) = -\frac{(3-1)^5}{180 \cdot 2^4} \cdot 0 = 0.$$

- Resultado exato

  $$\int_1^3 \left(4x^3 + 3x^2 + x + 1\right) dx = \left(x^4 + x^3 + \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_1^3,$$

  $$\int_1^3 \left(4x^3 + 3x^2 + x + 1\right) dx = 115{,}5 - 3{,}5 = 112.$$

Exemplo

- Calcular $\int_0^{\pi} (e^x + \text{sen}(x) + 2)\, dx$ com $m = 6$.

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{\pi - 0}{6} \rightarrow h = \frac{\pi}{6},$$

i	x_i	y_i	$c_i(t)$	$c_i(1S)$	$c_i(2S)$
0	0	3,0000	1	1	1
1	$\pi/6$	4,1881	2	4	3
2	$\pi/3$	5,7157	2	2	3
3	$\pi/2$	7,8105	2	4	2
4	$2\pi/3$	10,9866	2	2	3
5	$5\pi/6$	16,2082	2	4	3
6	π	25,1407	1	1	1

,

- Regra do trapézio

$$I_1 = \frac{\pi}{6 \cdot 2}(3{,}0000 + 2(4{,}1881 + 5{,}7157 + 7{,}8105 + 10{,}9866 + 16{,}2082) + 25{,}1407) \rightsquigarrow I_1 = 30{,}8816.$$

- Regra do 1/3 de Simpson

$$I_2 = \frac{\pi}{6 \cdot 3}(3{,}0000 + 4(4{,}1881 + 7{,}8105 + 16{,}2082) + 2(5{,}7157 + 10{,}9866) + 25{,}1407) \rightsquigarrow I_2 = 30{,}4337.$$

- Regra dos 3/8 de Simpson

$$I_3 = \frac{3\pi}{6 \cdot 8}(3{,}0000 + 3(4{,}1881 + 5{,}7157 + 10{,}9866 + 16{,}2082) + 2 \cdot 7{,}8105 + 25{,}1407) \rightsquigarrow I_3 = 30{,}4455.$$

Cálculo dos erros

- Determinação de θ

$$f(x) = e^x + \text{sen}(x) + 2,\ f'(x) = e^x + \cos(x),$$

$$f''(x) = e^x - \text{sen}(x) \rightsquigarrow \theta = \pi,$$

$$f'''(x) = e^x - \cos(x), f^{iv}(x) = e^x + \text{sen}(x) \rightsquigarrow \theta = \pi.$$

- Erro de integração da regra do trapézio

$$E_1 = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\theta) = -\frac{(\pi-0)^3}{12 \cdot 6^2} (e^\pi - \text{sen}(\pi)) \rightsquigarrow$$

$$E_1 = -1{,}6609.$$

- Erro de integração da regra do 1/3 de Simpson

$$E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{iv}(\theta) = -\frac{(\pi-0)^5}{180 \cdot 6^4} (e^\pi + \text{sen}(\pi)) \rightsquigarrow$$

$$E_2 = -0{,}0304.$$

- Erro de integração da regra dos 3/8 de Simpson

$$E_3 = -\frac{(b-a)^5}{80m^4} f^{iv}(\theta) = -\frac{(\pi-0)^5}{80 \cdot 6^4} (e^\pi + \text{sen}(\pi)) \rightsquigarrow$$

$$E_3 = -0{,}0683.$$

Comparação das regras de Newton-Cotes

$$\int_0^{\pi}(e^x+\text{sen}(x)+2)\,dx=(e^x-\cos(x)+2x)\Big|_0^{\pi}\approx 30{,}4239.$$

- Erros de integração máximo e real cometidos

n	I_n	E_n	$30{,}4239 - I_n$
1	30,8816	−1,6609	−0,4577
2	30,4337	−0,0304	−0,0098
3	30,4455	−0,0683	−0,0216

.

- Regra do 1/3 de Simpson produziu os menores erro máximo e erro real.

- Sinal negativo do erro E_n indica que a integração numérica foi por excesso: $I_n > I_{\text{exata}}$.

Escolha da regra

- Calcular $\int_0^{\pi} \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + \text{sen}(x) \right) dx$ com $E < 10^{-2}$.

- Determinação do valor de m para cada fórmula

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + \text{sen}(x), f'(x) = x^3 + 2x + \cos(x),$$

$$f''(x) = 3x^2 + 2 - \text{sen}(x) \rightsquigarrow \theta = \pi,$$

$$f'''(x) = 6x - \cos(x), f^{iv}(x) = 6 + \text{sen}(x) \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

- Regra do trapézio: $\theta = \pi$.

- Regras de Simpson: $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Cálculo do número de subintervalos

- Regra do trapézio

$$\left|\frac{(b-a)^3}{12m_1^2}f''(\theta)\right| < 10^{-2} \rightarrow$$

$$m_1 > \left(\frac{(\pi-0)^3}{12\cdot 10^{-2}}(3\pi^2+2-\text{sen}(\pi))\right)^{\frac{1}{2}} \approx 90{,}37 \rightsquigarrow$$

$$m_1 = 91.$$

- Regra do 1/3 de Simpson

$$\left|\frac{(b-a)^5}{180m_2^4}f^{iv}(\theta)\right| < 10^{-2} \rightarrow$$

$$m_2 > \left(\frac{(\pi-0)^5}{180\cdot 10^{-2}}(6+\text{sen}(\pi/2))\right)^{\frac{1}{4}} \approx 5{,}87 \rightsquigarrow$$

$$m_2 = 6.$$

- Regra dos 3/8 de Simpson

$$\left|\frac{(b-a)^5}{80m_3^4}f^{iv}(\theta)\right| < 10^{-2} \rightarrow$$

$$m_3 > \left(\frac{(\pi-0)^5}{80\cdot 10^{-2}}(6+\text{sen}(\pi/2))\right)^{\frac{1}{4}} \approx 7{,}19 \rightsquigarrow$$

$$m_3 = 9.$$

Integração pela regra do 1/3 de Simpson

- Passo de integração

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{\pi - 0}{6} \to h = \frac{\pi}{6},$$

i	x_i	y_i	c_i
0	0	0,0000	1
1	$\pi/6$	0,7929	4
2	$\pi/3$	2,2633	2
3	$\pi/2$	4,9894	4
4	$2\pi/3$	10,0628	2
5	$5\pi/6$	19,0979	4
6	π	34,2219	1

.

- Pela regra do 1/3 de Simpson

$$I_2 = \frac{\pi}{6 \cdot 3}(0{,}0000 + 4(0{,}7929 + 4{,}9894 + 19{,}0979) + 2(2{,}2633 + 10{,}0628) + 34{,}2219) \rightsquigarrow I_2 = 27{,}6451.$$

- Verificação da exatidão

$$\int_0^\pi \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + \mathrm{sen}(x)\right) dx = \left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} - \cos(x)\right)\Bigg|_0^\pi \approx 27{,}6364,$$

$$|27{,}6364 - 27{,}6451| = 0{,}0087 < 10^{-2}.$$

Algoritmo: Newton-Cotes

```
Algoritmo Newton-Cotes
{ Objetivo: Integrar uma função pelo método de Newton-Cotes }
parâmetros de entrada a, b, n, m
  { limite inferior, limite superior, }
  { grau do polinômio, número de subintervalos }
parâmetros de saída I, Erro
  { valor da integral e condição de erro, sendo }
  { Erro = 0 se não houve erro de consistência dos parâmetros, }
  { Erro = 1 se (n < 1 ou n > 8) e Erro = 2 se resto(m, n) ≠ 0 }
  se n < 1 ou n > 8 então
    Erro ← 1; escreva "n < 1 ou n > 8"; abandone
  fim se
  se resto(m, n) ≠ 0 então
    Erro ← 2; escreva "m não é múltiplo de n"; abandone
  fim se
  d(1) ← 2; d(2) ← 6; d(3) ← 8; d(4) ← 90; d(5) ← 288; d(6) ← 840
  d(7) ← 17280; d(8) ← 28350
  c(1) ← 1; c(2) ← 1; c(3) ← 4; c(4) ← 1; c(5) ← 3; c(6) ← 7
  c(7) ← 32c(8) ← 12; c(9) ← 19; c(10) ← 75; c(11) ← 50
  c(12) ← 41; c(13) ← 216; c(14) ← 27; c(15) ← 272; c(16) ← 751
  c(17) ← 3577; c(18) ← 1323; c(19) ← 2989; c(20) ← 989
  c(21) ← 5888; c(22) ← −928; c(23) ← 10496; c(24) ← −4540
  p ← (n ∗ (n + 2) + resto(n, 2))/4
  x ← a; y ← f(a)   { Avaliar a função f(x) em x = a }
  ck ← c(p); s ← y ∗ ck
  h ← (b − a)/m
  escreva 0, x, y, ck
  para i ← 2 até m + 1 faça
    x ← x + h
    y ← f(x)   { Avaliar a função f(x) }
    k ← trunca((resto(i − 2, n) + 1)/n) − trunca((i − 1)/m) + 1
    ck ← c(p + trunca(n/2) − abs(trunca(resto(i − 2, n) + 1 − n/2))) ∗ k
    s ← s + y ∗ ck
    escreva i − 1, x, y, ck
  fim para
  I ← n ∗ h/d(n) ∗ s
fim algoritmo
```

Complexidade: regras de Newton-Cotes

- Polinômios dados em termos do número de subintervalos m.

- Complexidade independe do grau n do polinômio interpolador utilizado.

Operações	Complexidade
Adições	$12m + 3$
Multiplicações	$2m + 4$
Divisões	$4m + 3$

Comparação das regras de Newton-Cotes

- Verificar o erro real cometido no cálculo de

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + \text{sen}(x) \right) dx,$$

usando as seis primeiras regras de Newton-Cotes, com $m = 60$.

n	$\lvert I_{\text{exata}} - I_n \rvert$
1	$8{,}0621 \times 10^{-3}$
2	$8{,}7063 \times 10^{-7}$
3	$1{,}9590 \times 10^{-6}$
4	$8{,}7368 \times 10^{-11}$
5	$1{,}8782 \times 10^{-10}$
6	$1{,}0303 \times 10^{-13}$

.

- À medida que o grau n do polinômio interpolador aumenta, o erro diminui.
- Fórmula utilizando grau par é melhor do que a de grau ímpar seguinte.
- Uso de fórmulas baseadas em polinômios interpoladores de grau par é mais vantajoso.

Quadratura de Gauss-Legendre

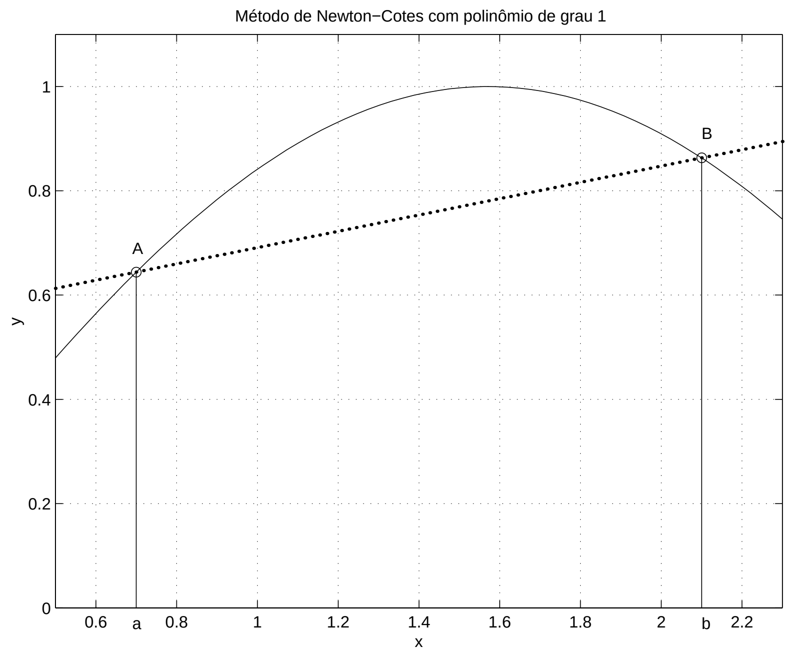
- Escolher pontos igualmente espaçados nas fórmulas de Newton-Cotes simplifica os cálculos.

- Sem a imposição de espaçamento constante.

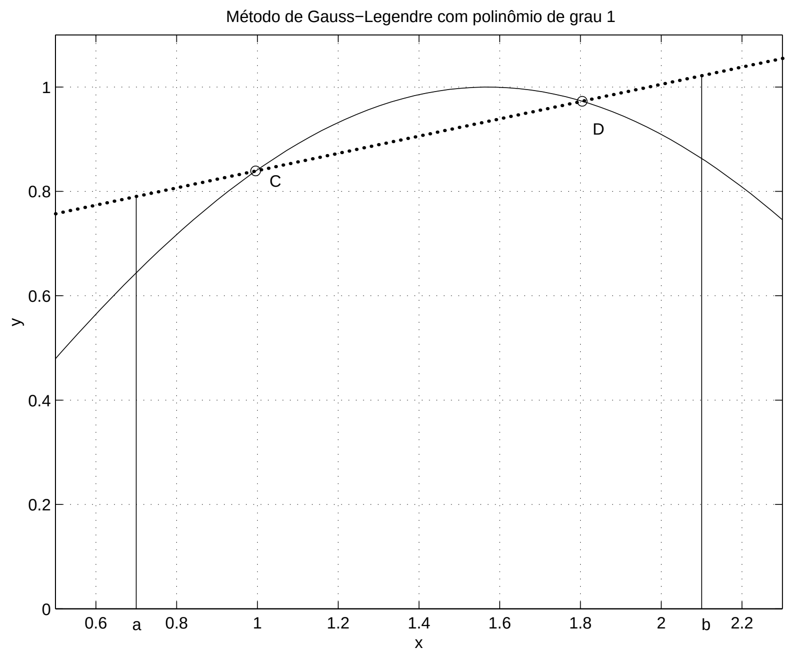
- Fórmulas fornecem uma maior exatidão, usando o mesmo número de pontos que Newton-Cotes.

Newton-Cotes X Gauss-Legendre

- Integração de $f(x)$ pela regra do trapézio, passando pelos pontos A e B



- Pontos C e D escolhidos tal que a área do trapézio seja mais próxima da área sob a curva



Fórmula para dois pontos

- Mudança de variável de x para t, definida no intervalo $[-1, 1]$

$$\boxed{x = x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}}.$$

- Derivando

$$dx = \frac{b-a}{2}dt$$

- e definindo

$$\boxed{F(t) = \frac{b-a}{2}f(x(t))},$$

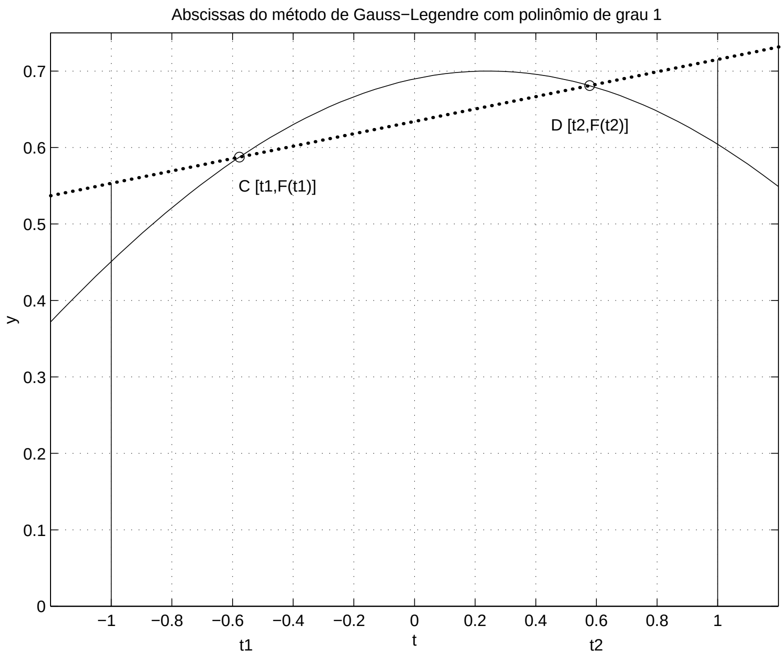
- a integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{b-a}F(t)\frac{b-a}{2}\,dt \rightsquigarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} F(t)\,dt.$$

Escolha das abscissas

- Pontos $C[t_1, F(t_1)]$ e $D[t_2, F(t_2)]$



- A integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} F(t)\,dt \approx \boxed{I_2 = A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2)}.$$

- Expressão análoga à regra do trapézio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} f(a) + \frac{h}{2} f(b).$$

- Encontrar valores de t_1, t_2, A_1 e A_2 que tornem a exatidão a maior possível.

Construção da fórmula de dois pontos

- Método construído de modo a ser exato para polinômios de grau até 3.
- Fazendo $F(t) = t^k,\ k = 0, 1, 2, 3,$
- e impondo $A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2) = \int_{-1}^{1} F(t)\, dt,$
- para $k = 0 \rightarrow F(t) = 1$

$$\int_{-1}^{1} 1\, dt = 1 - (-1) = 2 = A_1 1 + A_2 1,$$

- para $k = 1 \rightarrow F(t) = t$

$$\int_{-1}^{1} t\, dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = A_1 t_1 + A_2 t_2,$$

- para $k = 2 \rightarrow F(t) = t^2$

$$\int_{-1}^{1} t^2\, dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2,$$

- para $k = 3 \rightarrow F(t) = t^3$

$$\int_{-1}^{1} t^3\, dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 = A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3.$$

Sistema de equações não lineares

- Sistema de equações não lineares de ordem 4

$$A_1 + A_2 = 2,$$

$$A_1 t_1 + A_2 t_2 = 0,$$

$$A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 = \frac{2}{3},$$

$$A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3 = 0.$$

- Solução

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0{,}5774;$$

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5774;$$

$$A_1 = 1;$$

$$A_2 = 1.$$

Exemplo

- Calcular $\int_1^5 (2x^3 + 3x^2 + 6x + 1)dx$.
- Mudança de variável

$$x_i = \frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{5-1}{2} t_i + \frac{1+5}{2} \rightsquigarrow x_i = 2t_i + 3,$$

$$F(t_i) = \frac{b-a}{2} f(x_i) = \frac{5-1}{2} f(x_i) \rightsquigarrow F(t_i) = 2f(2t_i+3).$$

- Dispositivo prático

i	t_i	$F(t_i)$	A_i
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	69,7083	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	442,2917	1

,

$$I_2 = A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2) = 1 \cdot 69{,}7083 + 1 \cdot 442{,}2917;$$

$$I_2 = 512{,}0000.$$

- Resultado exato

$$\int_1^5 (2x^3 + 3x^2 + 6x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{2} + x^3 + 3x^2 + x\right)\Bigg|_1^5,$$

$$\int_1^5 (2x^3 + 3x^2 + 6x + 1)dx = 517{,}5 - 5{,}5 = 512.$$

Exemplo

- Calcular $\int_0^\pi (e^x + \text{sen}(x) + 2)\,dx$.
- Mudança de variável

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi-0}{2}t_i + \frac{0+\pi}{2} \leadsto x_i = \frac{\pi}{2}(t_i+1).$$

$$F(t_i) = \frac{b-a}{2}f(x_i) = \frac{\pi-0}{2}f(x_i) \leadsto F(t_i) = \frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}(t_i+1)\right)$$

i	t_i	$F(t_i)$	A_i
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	7,1605	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	22,8236	1

,

$$I_2 = A_1F(t_1) + A_2F(t_2) = 1\cdot 7{,}1605 + 1\cdot 22{,}8236;$$

$$I_2 = 29{,}9841.$$

- Valor exato: $\approx 30{,}4239$.
- Erro cometido: $|30{,}4239 - 29{,}9841| = 0{,}4398$.
- Mais exato que pela regra do trapézio com $m = 6$ subintervalos, equivalente a 7 pontos $(30{,}8816)$.

Fórmula geral

- Determinar os valores dos pesos A_i, e das abscissas $t_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} F(t)\, dt \approx I_n,$$

$$I_n = A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2) + \cdots + A_n F(t_n),$$

$$\boxed{I_n = \sum_{i=1}^{n} A_i F(t_i)}.$$

- Fórmula exata para polinômios de grau menor ou igual a $2n - 1$.
- Faz-se $F(t) = t^k,\ k = 0, 1, \ldots, 2n - 1,$
- sabendo que

$$\int_{-1}^{1} t^k\, dt = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ for ímpar,} \\ \dfrac{2}{k+1}, & \text{se } k \text{ for par.} \end{cases}$$

Sistema de equações não lineares

- Impondo $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i F(t_i) = \int_{-1}^{1} F(t)\, dt$.
- Sistema de equações não lineares de ordem $2n$

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n = 2,$$

$$A_1 t_1 + A_2 t_2 + A_3 t_3 + \cdots + A_n t_n = 0,$$

$$A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_3^2 + \cdots + A_n t_n^2 = \frac{2}{3},$$

$$\vdots$$

$$A_1 t_1^{2n-1} + A_2 t_2^{2n-1} + A_3 t_3^{2n-1} + \cdots + A_n t_n^{2n-1} = 0.$$

- Solução fornece os n pesos A_i e as n abscissas t_i.

Fórmula geral via polinômios de Legendre

- Fórmula de recorrência

$$L_n(x) = \frac{(2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x)}{n},$$

- com $L_0(x) = 1$ e $L_1(x) = x$.

- Por exemplo

$$L_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2},$$

$$L_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2},$$

$$L_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8},$$

$$L_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}.$$

Propriedades dos polinômios de Legendre

- Propriedades básicas dos polinômios de Legendre

$$L_n(1) = 1 \text{ e } L_n(-1) = (-1)^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

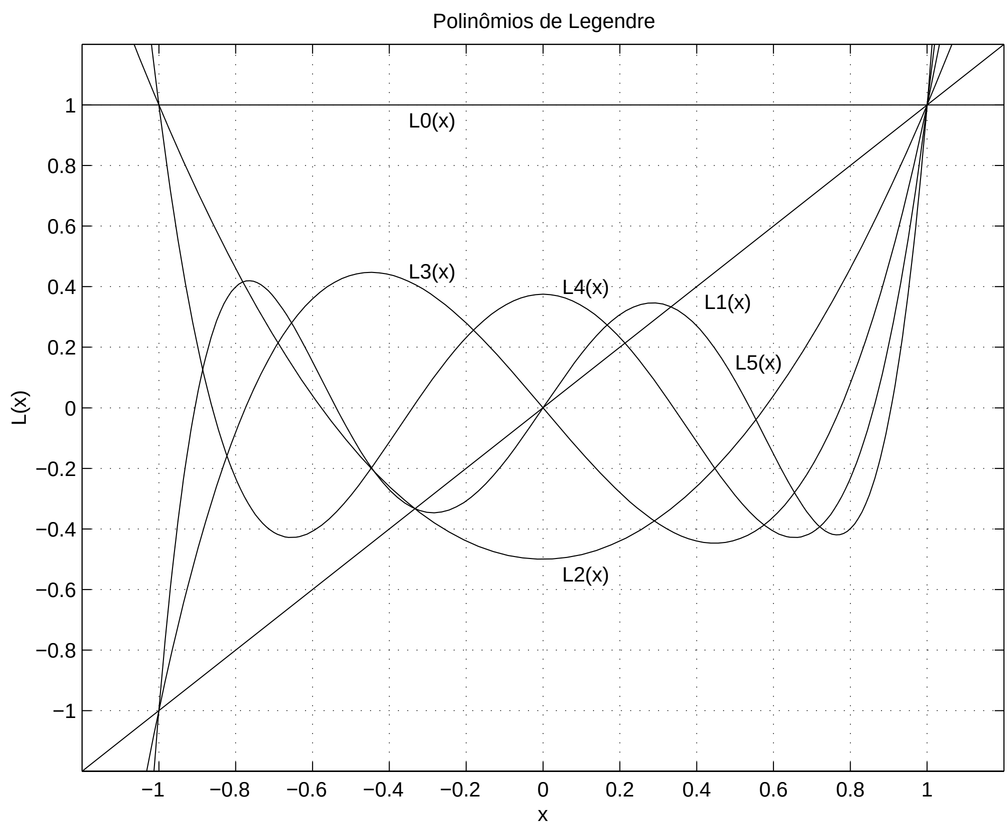
$$\int_{-1}^{1} L_n(x)Q_k(x)\,dx = 0,\ n > k,$$

- sendo $Q_k(x)$ um polinômio de grau $k < n$.
- Integral chamada de produto escalar das funções $L_n(x)$ e $Q_k(x)$.
- Duas funções são ditas ortogonais se seu produto escalar for nulo.
- Os polinômios $L_n(x)$ e $Q_k(x)$ são ortogonais e

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)L_k(x)\,dx \begin{cases} = 0, & \text{se } n \neq k, \\ > 0, & \text{se } n = k. \end{cases}$$

Polinômios de Legendre de grau até 5

- Equações algébricas $L_n(x) = 0$ possuem n raízes reais distintas pertencentes ao intervalo $(-1, 1)$



Fórmula geral via polinômios de Legendre

- Sejam os polinômios

$$F_k(t) = t^k L_n(t),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

- $L_n(t)$: polinômio de Legendre de grau n.
- $F_k(t)$ de grau menor ou igual a $2n-1$

$$\int_{-1}^{1} F_k(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i F_k(t_i),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\int_{-1}^{1} t^k L_n(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k L_n(t_i),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

- Polinômios de Legendre são ortogonais a qualquer polinômio de grau menor

$$\int_{-1}^{1} t^k L_n(t)\,dt = 0,\ n > k \longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k L_n(t_i) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

- Expressão verdadeira para qualquer valor de A_i se $L_n(t_i) = 0$ para todo i.

Valores de t_i e A_i

- Para maior exatidão na fórmula de quadratura é suficiente que t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sejam os zeros do polinômio de Legendre de grau n.

- Conhecidas as abscissas t_i, o sistema não linear se reduz a um sistema linear de ordem n

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & \cdots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & t_3^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \vdots \\ . \end{bmatrix}.$$

- Em vez de resolver este sistema via decomposição LU, os pesos A_i podem ser obtidos por

$$\boxed{A_i = \frac{2}{(1 - t_i^2)(L_n'(t_i))^2},\ i = 1, 2, \ldots, n},$$

- $L_n'(t_i)$: derivada de $L_n(x)$ na abscissa t_i.

Abscissas e pesos para Gauss-Legendre

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	2; 1	±0,57735 02691 89626	1
3	2	0	0,88888 88888 88889
	3; 1	±0,77459 66692 41483	0,55555 55555 55556
4	3; 2	±0,33998 10435 84856	0,65214 51548 62546
	4; 1	±0,86113 63115 94053	0,34785 48451 37454
5	3	0	0,56888 88888 88889
	4; 2	±0,53846 93101 05683	0,47862 86704 99366
	5, 1	±0,90617 98459 38664	0,23692 68850 56189
6	4; 3	±0,23861 91860 83197	0,46791 39345 72691
	5; 2	±0,66120 93864 66265	0,36076 15730 48139
	6; 1	±0,93246 95142 03152	0,17132 44923 79170
7	4	0	0,41795 91836 73469
	5; 3	±0,40584 51513 77397	0,38183 00505 05119
	6; 2	±0,74153 11855 99394	0,27970 53914 89277
	7; 1	±0,94910 79123 42759	0,12948 49661 68870
8	5; 4	±0,18343 46424 95650	0,36268 37833 78362
	6; 3	±0,52553 24099 16329	0,31370 66458 77887
	7; 2	±0,79666 64774 13627	0,22238 10344 53374
	8; 1	±0,96028 98564 97536	0,10122 85362 90376
9	5	0	0,33023 93550 01260
	6; 4	±0,32425 34234 03809	0,31234 70770 40003
	7; 3	±0,61337 14327 00590	0,26061 06964 02935
	8; 2	±0,83603 11073 26636	0,18064 81606 94857
	9; 1	±0,96816 02395 07626	0,08127 43883 61574
10	6; 5	±0,14887 43389 81631	0,29552 42247 14753
	7; 4	±0,43339 53941 29247	0,26926 67193 09996
	8; 3	±0,67940 95682 99024	0,21908 63625 15982
	9; 2	±0,86506 33666 88985	0,14945 13491 50581
	10; 1	±0,97390 65285 17172	0,06667 13443 08688

Exemplo

- Verificar que $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$, com $n=3$ e $n=4$.
- Mudança de variável

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{1-0}{2}t_i + \frac{0+1}{2} \leadsto x_i = \frac{1}{2}(t_i+1).$$

$$F(t_i) = \frac{b-a}{2}f(x_i) = \frac{1-0}{2}f(x_i) \leadsto F(t_i) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}(t_i+1)\right)$$

- Para $n = 3$

i	t_i	$F(t_i)$	A_i
1	−0,77460	0,49373	0,55556
2	0	0,40000	0,88889
3	0,77460	0,27975	0,55556

,

$$I_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i F(t_i) \to I_3 = 0{,}78527 \leadsto 4 \cdot I_3 = 3{,}14108 \approx \pi.$$

- Para $n = 4$

i	t_i	$F(t_i)$	A_i
1	−0,86114	0,49760	0,34785
2	−0,33998	0,45089	0,65215
3	0,33998	0,34509	0,65215
4	0,86114	0,26796	0,34785

,

$$I_4 = \sum_{i=1}^{4} A_i F(t_i) \to I_4 = 0{,}78540 \leadsto 4 \cdot I_4 = 3{,}14160 \approx \pi.$$

Exemplo

- Calcular $\int_0^{\pi} (e^x + \text{sen}(x) + 2)\, dx$ com $n = 5$.
- Mudança de variável

$$x_i = \frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi - 0}{2} t_i + \frac{0+\pi}{2} \rightsquigarrow x_i = \frac{\pi}{2}(t_i + 1).$$

$$F(t_i) = \frac{b-a}{2} f(x_i) = \frac{\pi - 0}{2} f(x_i) \rightsquigarrow F(t_i) = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}(t_i + 1)\right)$$

i	t_i	$F(t_i)$	A_i
1	−0,90618	5,19246	0,23693
2	−0,53847	7,42638	0,47863
3	0	12,26867	0,56889
4	0,53847	21,78861	0,47863
5	0,90618	34,74072	0,23693

,

$$I_5 = \sum_{i=1}^{5} A_i F(t_i) \to I_5 = 30{,}42406.$$

- Resultado exato: $\approx 30{,}42388$.
- Gauss-Legendre com $n = 5$ é mais exato que a regra do 1/3 de Simpson com $m = 6$ $(30{,}4337)$.

Erro de integração

- Erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre

$$\boxed{E_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)} f^{2n}(\theta),\ a < \theta < b},$$

- θ: abscissa, na qual a derivada $f^{2n}(x)$ apresenta o maior valor em módulo no intervalo $[a, b]$.

- Cota máxima do erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre.

Exemplo

- Calcular $\int_0^{\pi}\left(\frac{x^4}{4}+x^2+\text{sen}(x)\right)dx$, com $n=2$ e o respectivo erro de integração.

- Mudança de variável

$$x_i=\frac{b-a}{2}t_i+\frac{a+b}{2}=\frac{\pi-0}{2}t_i+\frac{0+\pi}{2}\leadsto x_i=\frac{\pi}{2}(t_i+1).$$

$$F(t_i)=\frac{b-a}{2}f(x_i)=\frac{\pi-0}{2}f(x_i)\leadsto F(t_i)=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}(t_i+1)\right)$$

- Para $n=2$

i	t_i	$F(t_i)$	A_i
1	$-0{,}57735$	1,73654	1
2	0,57735	25,41065	1

,

$$I_2=\sum_{i=1}^{2}A_iF(t_i)\leadsto I_2=27{,}14719.$$

Cálculo do erro

- Determinação de θ

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + \text{sen}(x), f'(x) = x^3 + 2x + \cos(x),$$

$$f''(x) = 3x^2 + 2 - \text{sen}(x), f'''(x) = 6x - \cos(x),$$

$$f^{iv}(x) = 6 + \text{sen}(x) \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

- Cálculo do erro máximo

$$E_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)} f^{2n}(\theta),$$

$$E_2 = \frac{(\pi - 0)^5(2!)^4}{(4!)^3(5)} \left(6 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \rightsquigarrow$$

$$E_2 = 0{,}49587.$$

- Valor exato: $\approx 27{,}63641$.
- Erro real: $|27{,}63641 - 27{,}14719| = 0{,}48922 < E_2$.

Algoritmo: pesos e abscissas para G-L

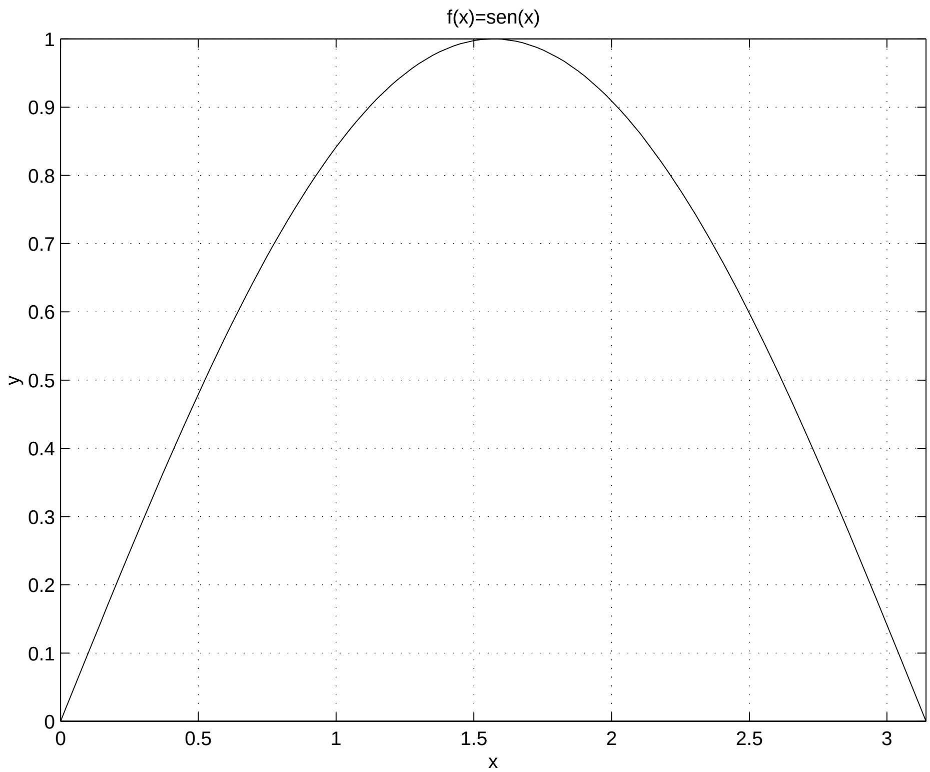
```
Algoritmo PesAbsGL
{ Objetivo: Calcular pesos e abscissas para a }
  { fórmula de Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada n  { número de pontos }
parâmetros de saída A, t, Erro
  { Pesos, abscissas e condição de erro, sendo }
  { Erro=0 se não houve erro (n ≥ 1) e Erro=1 se n < 1 }
  se n < 1 então
    escreva "número de pontos < 1"; Erro ← 1; abandone
  fim se
  m ← trunca((n + 1)/2); Erro ← 0
  para i ← 1 até m faça
    z ← cos(π ∗ (i − 0,25)/(n + 0,5))
    repita
      p1 ← 1; p2 ← 0
      para j ← 1 até n faça
        p3 ← p2; p2 ← p1
        { Polinômio de Legendre no ponto z }
        p1 ← ((2 ∗ j − 1) ∗ z ∗ p2 − (j − 1) ∗ p3)/j
      fim para
      { Derivada do polinômio de Legendre no ponto z }
      pp ← n ∗ (z ∗ p1 − p2)/(z^2 − 1); z1 ← z
      { Método de Newton para calcular os zeros }
      z ← z1 − p1/pp
      se abs(z − z1) < 10^−15 então  interrompa  fim se
    fim repita
    t(m + 1 − i) ← z { abscissa }
    A(m + 1 − i) ← 2/((1 − z^2) ∗ pp^2) { peso }
    { Metade das raízes são calculadas devido à simetria }
  fim para
fim algoritmo
```

Algoritmo: quadratura de Gauss-Legendre

```
Algoritmo Gauss-Legendre
{ Objetivo: Integrar função por Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada a, b, n
  { limite inferior, limite superior, número de pontos }
parâmetros de saída Integral, Erro
  { valor da integral e condição de erro, sendo }
  { Erro=0 se não houve erro (n ≥ 1) e Erro=1 se n < 1 }
  se n < 1 então
    escreva "número de pontos < 1"; Erro ← 1; abandone
  fim se
  [A, t, Erro] ← PesAbsGL(n)
  { parâmetros de saída de PesAbsGL }
  { retornam nas variáveis A, t, Erro }
  Erro ← 0
  { Cálculo da integral }
  s ← 0; e1 ← (b − a)/2; e2 ← (a + b)/2
  para i ← 1 até n faça
    j ← i − (n + 1)/2 + sinal(i − (n + resto(n + 1, 2))/2)∗
      (resto(n, 2) + resto(n + 1, 2)/2)
    z ← sinal(j) ∗ t(abs(j))
    x ← e1 ∗ z + e2; y ← e1 ∗ f(x)   { Avaliar a função f(x) }
    c ← A(abs(j)); s ← s + y ∗ c
    escreva i, z, x, y, c
  fim para
  Integral ← s
fim algoritmo
```

Comparação dos métodos

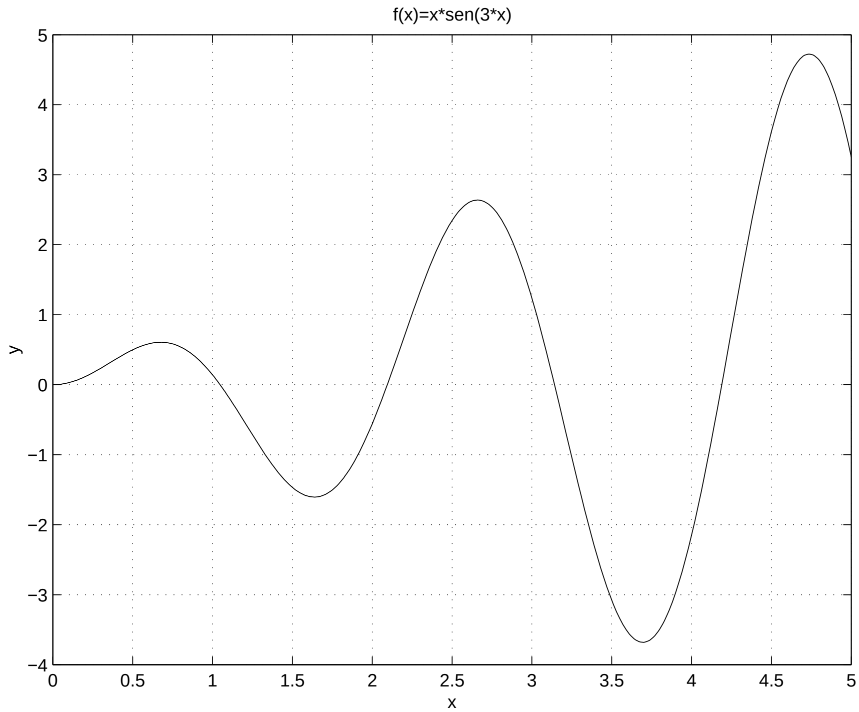
$$\int_0^{\pi} \mathrm{sen}(x)\, dx, = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = 2.$$

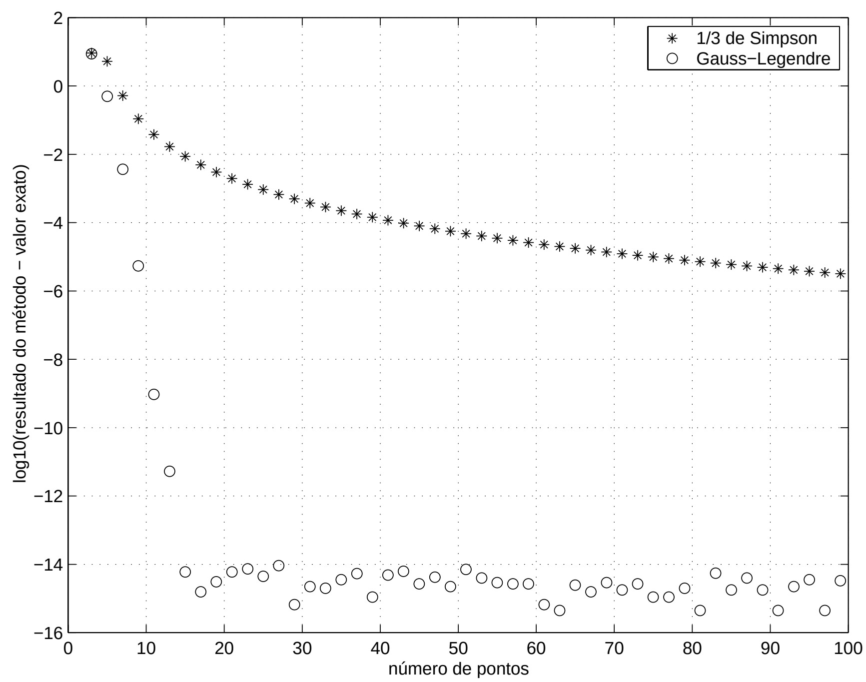


grau	subintervalos	Newton-Cotes	pontos	Gauss-Legendre
1	1	$2{,}000\times10^{0}$	2	$6{,}418\times10^{-2}$
2	2	$9{,}440\times10^{-2}$	3	$1{,}389\times10^{-3}$
3	3	$4{,}052\times10^{-2}$	4	$1{,}577\times10^{-5}$
4	4	$1{,}429\times10^{-3}$	5	$1{,}103\times10^{-7}$
5	5	$7{,}969\times10^{-4}$	6	$5{,}227\times10^{-10}$
6	6	$1{,}781\times10^{-5}$	7	$1{,}791\times10^{-12}$
7	7	$1{,}087\times10^{-5}$	8	$4{,}441\times10^{-15}$
8	8	$1{,}647\times10^{-7}$	9	$4{,}441\times10^{-16}$

Exemplo

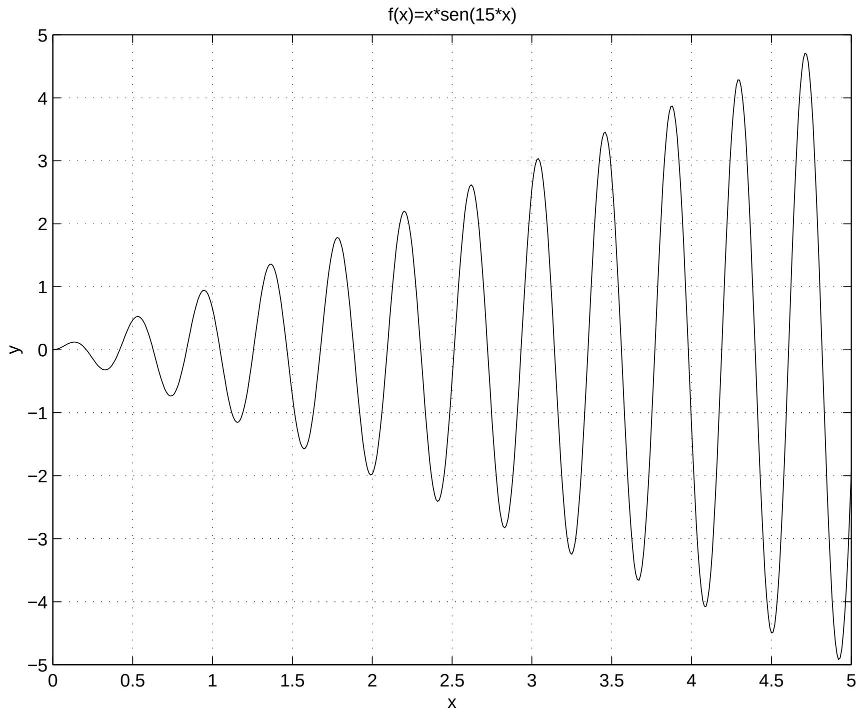
$$\int_0^5 x\,\text{sen}(3x)\,dx = \frac{\text{sen}(3x)}{9} - \frac{x\cos(3x)}{3}\bigg|_0^5 \approx 1{,}3384.$$

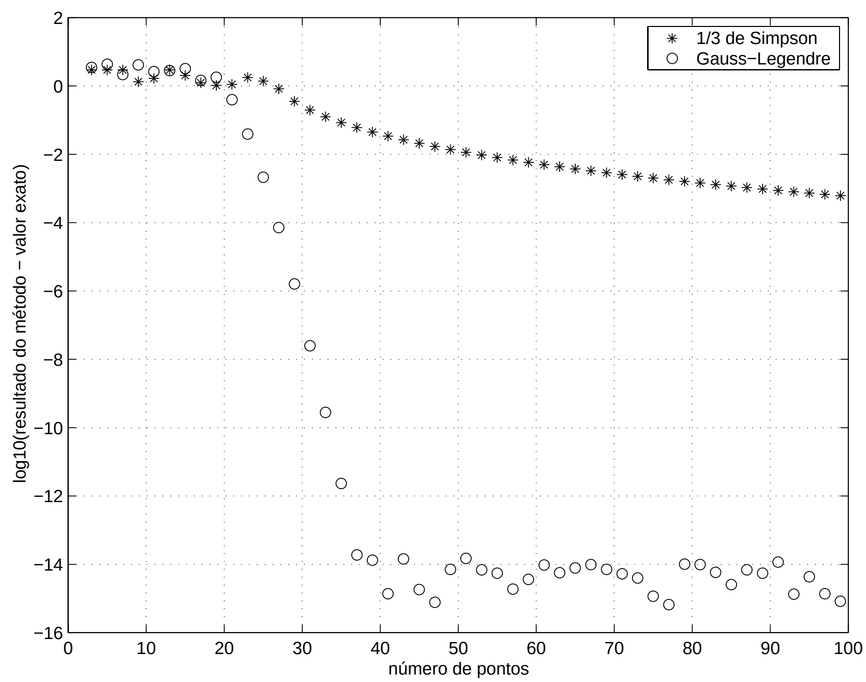




Exemplo

$$\int_0^5 x\,\text{sen}(15x)\,dx = \frac{\text{sen}(15x)}{225} - \frac{x\cos(15x)}{15}\bigg|_0^5 \approx -0{,}3090.$$





Integração dupla por Newton-Cotes

- Determinação do valor de integral dupla definida

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx.$$

- Função integrando $f(x,y)$ pode ser aproximada por um polinômio interpolador.
- Integral do polinômio obtida analiticamente.
- Fazendo $G(x) = \int_c^d f(x,y)\, dy$

$$I = \int_a^b G(x)\, dx.$$

- Cálculo de uma integral dupla consiste na solução de duas integrais simples.

Fórmulas simples

- Para resolver uma integral simples, pode-se aplicar qualquer uma das fórmulas de Newton-Cotes.

- Se for utilizada a regra do 1/3 de Simpson

$$I = \int_a^b G(x)\, dx = \frac{1}{3} h_x (G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)),$$

$$I = \frac{1}{3} h_x \sum_{i=0}^{2} c_{x_i} G(x_i).$$

- $h_x = (b - a)/2$, $c_{x_0} = c_{x_2} = 1$, $c_{x_1} = 4$ e

$$G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\, dy,\ i = 0, 1, 2.$$

- Para o cálculo de $G(x_i)$ pode ser utilizada também qualquer uma das fórmulas de Newton-Cotes.

Fórmulas simples cont.

- Utilizando a regra dos 3/8 de Simpson

$$G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\, dy,$$

$$= \frac{3}{8} h_y (f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) +$$

$$f(x_i, y_3)),$$

$$G(x_i) = \frac{3}{8} h_y \sum_{j=0}^{3} c_{y_j} f(x_i, y_j).$$

- $h_y = (d - c)/3$, $c_{y_0} = c_{y_3} = 1$, $c_{y_1} = c_{y_2} = 3$ e $f(x_i, y_j)$ é o valor da função integrando no ponto (x_i, y_j).

- Substituindo os valores de $G(x_i)$

$$I = \frac{1}{3} h_x \frac{3}{8} h_y \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} c_{x_i} c_{y_j} f(x_i, y_j).$$

Exemplo

- Calcular $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x+y)\, dy\, dx$.
- Fazendo

$$G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x+y)\, dy \to I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x)\, dx.$$

- Utilizando a regra do 1/3 de Simpson em x

$$I = \frac{1}{3} h_x (G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)),\ h_x = \frac{b-a}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

- Cálculo de $G(x_i) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x_i + y)\, dy,\ i = 0, 1, 2$ e $x_i = a + ih_x = i\frac{\pi}{4}$.
- Utilizando a regra dos 3/8 de Simpson

$$G(x_i) = \frac{3}{8} h_y (\operatorname{sen}(x_i + y_0) + 3\operatorname{sen}(x_i + y_1) + 3\operatorname{sen}(x_i + y_2) + \operatorname{sen}(x_i + y_3)),$$

$$h_y = \frac{d-c}{3} = \frac{\pi}{12} \text{ e } y_j = c + jh_y = j\frac{\pi}{12}.$$

Exemplo cont.

- Sendo $x_i = a + ih_x = i\dfrac{\pi}{4}$ e $y_j = c + jh_y = j\dfrac{\pi}{12}$.

- Para $x_0 = 0 \cdot \dfrac{\pi}{4} = 0$:

$$
\begin{aligned}
G(x_0) &= \frac{3}{8}\frac{\pi}{12}(\,\mathrm{sen}(0+y_0)+3\,\mathrm{sen}(0+y_1)+3\,\mathrm{sen}(0+y_2)+ \\
&\quad \mathrm{sen}(0+y_3)), \\
&= \frac{\pi}{32}\left(\mathrm{sen}(0)+3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)+3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)+\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \leadsto \\
G(x_0) &= 0{,}2929.
\end{aligned}
$$

- Para $x_1 = 1 \cdot \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$:

$$
\begin{aligned}
G(x_1) &= \frac{3}{8}\frac{\pi}{12}\left(\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y_0\right)+3\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y_1\right)+3\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y_2\right)+\right. \\
&\quad \left.\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y_3\right)\right), \\
&= \frac{\pi}{32}\left(\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)+3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)+3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+\right. \\
&\quad \left.\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \leadsto \\
G(x_1) &= 0{,}7071.
\end{aligned}
$$

Exemplo cont.

- Para $x_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$:

$$G(x_2) = \frac{3}{8}\frac{\pi}{12}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y_0\right)+3\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y_1\right)+3\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y_2\right)+\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y_3\right)\right),$$

$$= \frac{\pi}{32}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)+3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \rightsquigarrow$$

$$G(x_2) = 0{,}7071.$$

- Valor numérico da integral

$$I = \frac{1}{3}h_x(G(x_0)+4G(x_1)+G(x_2)),$$

$$I = \frac{1}{3}\frac{\pi}{4}(0{,}2929+4\cdot 0{,}7071+0{,}7071) \rightsquigarrow I = 1{,}0023.$$

- Cálculo analítico da integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x+y)\,dy\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dx,$$

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos(x+0)\right)dx = -\left[\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\text{sen}(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$I = -\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\left(\text{sen}\left(0+\frac{\pi}{4}\right)-\text{sen}(0)\right) \rightsquigarrow I = 1.$$

Dispositivo prático

- Utilizando a regra do 1/3 de Simpson para integração em x e a regra dos 3/8 em y.

		j	0	1	2	3
		y_j	c	$c+h_y$	$c+2h_y$	$c+3h_y$
i	x_i	$c_{x_i}\backslash c_{y_j}$	1	3	3	1
0	a	1	$\boxed{c_{x_0}\cdot c_{y_0}}$ $f(x_0,y_0)$	$\boxed{c_{x_0}\cdot c_{y_1}}$ $f(x_0,y_1)$	$\boxed{c_{x_0}\cdot c_{y_2}}$ $f(x_0,y_2)$	$\boxed{c_{x_0}\cdot c_{y_3}}$ $f(x_0,y_3)$
1	$a+h_x$	4	$\boxed{c_{x_1}\cdot c_{y_0}}$ $f(x_1,y_0)$	$\boxed{c_{x_1}\cdot c_{y_1}}$ $f(x_1,y_1)$	$\boxed{c_{x_1}\cdot c_{y_2}}$ $f(x_1,y_2)$	$\boxed{c_{x_1}\cdot c_{y_3}}$ $f(x_1,y_3)$
2	$a+2h_x$	1	$\boxed{c_{x_2}\cdot c_{y_0}}$ $f(x_2,y_0)$	$\boxed{c_{x_2}\cdot c_{y_1}}$ $f(x_2,y_1)$	$\boxed{c_{x_2}\cdot c_{y_2}}$ $f(x_2,y_2)$	$\boxed{c_{x_2}\cdot c_{y_3}}$ $f(x_2,y_3)$

- Valor da integral

$$I = \frac{1}{3}h_x\frac{3}{8}h_yS,\ \ S = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3} c_{x_i}c_{y_j}f(x_i,y_j).$$

- S: soma obtida, tomando-se todas as células da tabela, do produto $c_{x_i}\cdot c_{y_j}$ dos coeficientes de Cotes pelo valor da função $f(x_i,y_j)$.

Exemplo

- Calcular $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x+y)\, dy\, dx$.
- Para tal,

$$h_x = \frac{b-a}{2} = \frac{\pi/2-0}{2} \to h_x = \frac{\pi}{4} \text{ e } x_i = a + ih_x = 0 + i\frac{\pi}{4} \to x_i = i\frac{\pi}{4},$$

$$h_y = \frac{d-c}{3} = \frac{\pi/4-0}{3} \to h_y = \frac{\pi}{12} \text{ e } y_j = c + jh_y = 0 + j\frac{\pi}{12} \to y_j = j\frac{\pi}{12}.$$

		j	0	1	2	3
		y_j	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$
i	x_i	$c_{x_i} \backslash c_{y_j}$	1	3	3	1
0	0	1	$\boxed{1}$ 0,0000	$\boxed{3}$ 0,2588	$\boxed{3}$ 0,5000	$\boxed{1}$ 0,7071
1	$\pi/4$	4	$\boxed{4}$ 0,7071	$\boxed{12}$ 0,8660	$\boxed{12}$ 0,9659	$\boxed{4}$ 1,0000
2	$\pi/2$	1	$\boxed{1}$ 1,0000	$\boxed{3}$ 0,9659	$\boxed{3}$ 0,8660	$\boxed{1}$ 0,7071

.

- Valor da integral

$$I = \frac{1}{3} h_x \frac{3}{8} h_y S = \frac{1}{3}\frac{\pi}{4}\frac{3}{8}\frac{\pi}{12} 38{,}9975 \leadsto I = 1{,}0023.$$

Fórmulas compostas

- Melhorar a exatidão de uma integral.
- Subdividir o intervalo $[a, b]$ em m_x subintervalos iguais.
- m_x múltiplo do grau n_x do polinômio usado em x.
- Na regra do 1/3 de Simpson, m_x deve ser múltiplo de $2\ (= n_x)$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b G(x)\,dx, \\
&= \frac{1}{3}h_x(G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)) + \\
&\quad \frac{1}{3}h_x(G(x_2) + 4G(x_3) + G(x_4)) + \\
&\quad \ldots + \frac{1}{3}h_x(G(x_{m_x-2}) + 4G(x_{m_x-1}) + G(x_{m_x})), \\
I &= \frac{1}{3}h_x(G(x_0) + 4G(x_1) + 2G(x_2) + 4G(x_3) + 2G(x_4) + \\
&\quad \ldots + 2G(x_{m_x-2}) + 4G(x_{m_x-1}) + G(x_{m_x})) \rightsquigarrow
\end{aligned}
$$

$$
I = \frac{1}{3}h_x \sum_{i=0}^{m_x} c_{x_i} G(x_i).
$$

Fórmulas compostas cont.

- Para o cálculo de $G(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, m_x$ usando a regra dos 3/8 de Simpson

$$G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy$$

$$G(x_i) = \frac{3}{8} h_y (f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) + f(x_i, y_3)).$$

- Subdividindo o intervalo $[c, d]$ em m_y subintervalos iguais.
- m_y múltiplo do grau n_y do polinômio usado em y.

$$\begin{aligned}
G(x_i) &= \int_c^d f(x_i, y)\, dy \\
&= \frac{3}{8} h_y (f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) + f(x_i, y_3)) \\
&+ \frac{3}{8} h_y (f(x_i, y_3) + 3f(x_i, y_4) + 3f(x_i, y_5) + f(x_i, y_6)) + \ldots \\
&+ \frac{3}{8} h_y (f(x_i, y_{m_y - 3}) + 3f(x_i, y_{m_y - 2}) + 3f(x_i, y_{m_y - 1}) + f(x_i, y_{m_y})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(x_i) &= \frac{3}{8} h_y (f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) + 2f(x_i, y_3) \\
&+ 3f(x_i, y_4) + 3f(x_i, y_5) + 2f(x_i, y_6) + \ldots \\
&+ 2f(x_i, y_{m_y - 3}) + 3f(x_i, y_{m_y - 2}) + 3f(x_i, y_{m_y - 1}) + f(x_i, y_{m_y})),
\end{aligned}$$

$$G(x_i) = \frac{3}{8} h_y \sum_{j=0}^{m_y} c_{y_j} f(x_i, y_j), \; i = 0, 1, 2, \ldots, m_x.$$

Fórmulas compostas cont.

- Substituindo os valores de $G(x_i)$

$$I = \frac{1}{3} h_x \sum_{i=0}^{m_x} c_{x_i} \left(\frac{3}{8} h_y \sum_{j=0}^{m_y} c_{y_j} f(x_i, y_j) \right) \rightsquigarrow$$

$$I = \frac{1}{3} h_x \frac{3}{8} h_y \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_y} c_{x_i} c_{y_j} f(x_i, y_j).$$

- Fórmula generalizada para qualquer grau do polinômio interpolador utilizado

$$\boxed{I = \frac{n_x}{d_{n_x}} h_x \frac{n_y}{d_{n_y}} h_y \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_y} c_{x_i} c_{y_j} f(x_i, y_j)}.$$

- $h_x = (b - a)/m_x$ e $h_y = (d - c)/m_y$.

Algoritmo: integração dupla de Newton-Cotes

```
Algoritmo Newton-Cotes-Dupla
{ Objetivo: Cálculo de integral dupla pelas fórmulas de Newton-Cotes }
parâmetros de entrada ax, bx, nx, mx, ay, by, ny, my
  { limite inferior em x, limite superior em x, }
  { grau do polinômio em x, número de subintervalos em x, }
  { limite inferior em y, limite superior em y, }
  { grau do polinômio em y, número de subintervalos em y }
parâmetros de saída Integral, Erro
  { valor da integral e condição de erro, sendo }
  { Erro = 0 se não houve erro de consistência dos parâmetros, }
  { Erro = 1 se grau nx < 1 ou nx > 8 ou ny < 1 ou ny > 8, }
  { Erro = 2 se mx não for múltiplo de nx ou my não for de ny }
  se (nx < 1 ou nx > 8) ou (ny < 1 ou ny > 8) então
    Erro ← 1, escreva "nx < 1 ou nx > 8 ou ny < 1 ou ny > 8", abandone
  fim se
  se (resto(mx, nx) ≠ 0) ou (resto(my, ny) ≠ 0) então
    Erro ← 2
    escreva "num. subintervalos incompatível com grau do polinômio"
    abandone
  fim se
  Erro ← 0; d(1) ← 2; d(2) ← 6; d(3) ← 8; d(4) ← 90
  d(5) ← 288; d(6) ← 840; d(7) ← 17280; d(8) ← 28350
  c(1) ← 1; c(2) ← 1; c(3) ← 4; c(4) ← 1; c(5) ← 3; c(6) ← 7; c(7) ← 32
  c(8) ← 12; c(9) ← 19; c(10) ← 75; c(11) ← 50; c(12) ← 41
  c(13) ← 216; c(14) ← 27; c(15) ← 272; c(16) ← 751; c(17) ← 3577
  c(18) ← 1323; c(19) ← 2989; c(20) ← 989; c(21) ← 5888
  c(22) ← −928; c(23) ← 10496; c(24) ← −4540
  px ← (nx∗(nx+2)+resto(nx, 2))/4; py ← (ny∗(ny+2)+resto(ny, 2))/4
  hx ← (bx − ax)/mx; hy ← (by − ay)/my; Soma ← 0
  para i ← 0 até mx faça
    x ← ax + i ∗ hx
    kx ← trunca((nx−resto(i, nx))/nx)−trunca((mx−resto(i, mx))/mx)+1
    ckx ← c(px+trunca(nx/2)−abs(trunca(resto(i−1, nx)+1−nx/2)))∗kx
    para j ← 0 até my faça
      y ← ay + j ∗ hy
      ky ← trunca((ny−resto(j,ny))/ny)−trunca((my−resto(j,my))/my)+1
      cky ← c(py+trunca(ny/2)−abs(trunca(resto(j−1, ny)+1−ny/2)))∗ky
      fxy ← f(x, y)   { Avaliar a função f em (x, y) }
      Soma ← Soma + ckx ∗ cky ∗ fxy
    fim se
  fim se
  Integral ← nx ∗ ny ∗ hx ∗ hy/(d(nx) ∗ d(ny)) ∗ Soma
fim algoritmo
```

Exemplo

- Calcular $\int_2^5 \int_0^1 \text{sen}(x^2 + y^2)\, dy\, dx$, com $n_x = 3$ (regra dos 3/8), $m_x = 3$ subintervalos em x, $n_y = 2$ (regra do 1/3) e $m_y = 4$ subintervalos em y.

Integracao dupla por Newton-Cotes

i	x(i)	c(i)	j	y(j)	c(j)	f(x(i),y(j))
0	2.00000e+00	1	0	0.00000e+00	1	-7.56802e-01
			1	2.50000e-01	4	-7.96151e-01
			2	5.00000e-01	2	-8.94989e-01
			3	7.50000e-01	4	-9.88788e-01
			4	1.00000e+00	1	-9.58924e-01
1	3.00000e+00	3	0	0.00000e+00	1	4.12118e-01
			1	2.50000e-01	4	3.54405e-01
			2	5.00000e-01	2	1.73889e-01
			3	7.50000e-01	4	-1.37287e-01
			4	1.00000e+00	1	-5.44021e-01
2	4.00000e+00	3	0	0.00000e+00	1	-2.87903e-01
			1	2.50000e-01	4	-3.47156e-01
			2	5.00000e-01	2	-5.15882e-01
			3	7.50000e-01	4	-7.54267e-01
			4	1.00000e+00	1	-9.61397e-01
3	5.00000e+00	1	0	0.00000e+00	1	-1.32352e-01
			1	2.50000e-01	4	-7.01835e-02
			2	5.00000e-01	2	1.16990e-01
			3	7.50000e-01	4	4.16652e-01
			4	1.00000e+00	1	7.62558e-01

- Resultado da integral: $I = -0{,}7876$.

Integração dupla via Gauss-Legendre

- Fórmulas de Gauss-Legendre também podem ser utilizadas para o cálculo aproximado da integral dupla definida

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

- Fazendo $G(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$,

$$I = \int_a^b G(x)\, dx.$$

- Cálculo de integral dupla por Gauss-Legendre consiste na determinação de duas integrais simples.

Fórmula para dois pontos

- Fazendo uma mudança de variável de x para t sendo que $-1 \leq t \leq 1$

$$x = x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \longrightarrow dx = \frac{b-a}{2}dt.$$

- Tomando

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}.$$

- Definindo

$$H(t) = \frac{b-a}{2}G(x(t)),$$

$$I = \int_a^b G(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{b-a}H(t)\frac{b-a}{2}\, dt = \int_{-1}^{1} H(t)\, dt.$$

- Resolvendo a integral simples por Gauss-Legendre, com $n_x = 2$ pontos

$$I = \int_{-1}^{1} H(t)\, dt = A_1 H(t_1) + A_2 H(t_2).$$

- A_i: pesos e t_i: abscissas ou zeros do polinômio de Legendre de grau $n_x = 2$.

Fórmula para dois pontos cont.

- Valores de A_i e t_i podem ser obtidos na literatura ou gerados pelo algoritmo dado.
- Particularmente, para $n_x = 2$

$$A_1 = A_2 = 1,\ t_1 = -1/\sqrt{3} \text{ e } t_2 = 1/\sqrt{3}.$$

- Cálculo de $G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\, dy.$
- Mudança de variável de y para u tal que $-1 \leq u \leq 1$

$$y = y(u) = \frac{d-c}{2}u + \frac{c+d}{2} \longrightarrow dy = \frac{d-c}{2}\, du$$

- Tomando

$$y_j = \frac{d-c}{2}u_j + \frac{c+d}{2}.$$

- Definindo

$$F_i(u) = \frac{d-c}{2} f(x_i, y(u)),$$

$$G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)\, dy = \int_{-1}^{1} \frac{2}{d-c} F_i(u) \frac{d-c}{2}\, du.$$

Fórmula para dois pontos cont.

- Valor de $G(x_i)$

$$G(x_i) = \int_{-1}^{1} F_i(u)\, du.$$

- Usando a fórmula para $n_y = 2$ pontos

$$G(x_i) = \int_{-1}^{1} F_i(u)\, du = B_1 F_i(u_1) + B_2 F_i(u_2).$$

- B_j: pesos e $F_i(u_j) = \dfrac{d-c}{2} f(x_i, y_j)$.
- Logo

$$H(t_i) = \frac{b-a}{2} G(x_i) = \frac{b-a}{2}(B_1 F_i(u_1) + B_2 F_i(u_2)).$$

- Substituindo os valores de $H(t_i)$

$$I = A_1 \left(\frac{b-a}{2}(B_1 F_1(u_1) + B_2 F_1(u_2))\right) +$$
$$A_2 \left(\frac{b-a}{2}(B_1 F_2(u_1) + B_2 F_2(u_2))\right).$$

Fórmula para dois pontos cont.

❑ Substituindo $F_i(u_j),\ j = 1, 2$

$$I = A_1\left(\frac{b-a}{2}\left(B_1\frac{d-c}{2}f(x_1,y_1)+B_2\frac{d-c}{2}f(x_1,y_2)\right)\right)$$

$$+A_2\left(\frac{b-a}{2}\left(B_1\frac{d-c}{2}f(x_2,y_1)+B_2\frac{d-c}{2}f(x_2,y_2)\right)\right).$$

❑ Rearranjando

$$I = \frac{(b-a)}{2}\frac{(d-c)}{2}\left(A_1B_1f(x_1,y_1) + A_1B_2f(x_1,y_2)+\right.$$

$$\left.+ A_2B_1f(x_2,y_1) + A_2B_2f(x_2,y_2)\right),$$

$$\boxed{I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)\sum_{i=1}^{2} A_i \sum_{j=1}^{2} B_j f(x_i, y_j)}.$$

Dispositivo prático

- Sistematizar dados necessários para calcular uma integral dupla pela fórmula de Gauss-Legendre.

- Usando $n_x = 2$ pontos em x e $n_y = 2$ pontos em y

			j	1	2
			u_j	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
			y_j	y_1	y_2
i	t_i	x_i	$A_i \backslash B_j$	1	1
1	$-1/\sqrt{3}$	x_1	1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$
2	$1/\sqrt{3}$	x_2	1	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$

- Valor da integral

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S,$$

$$S = \sum_{i=1}^{2} A_i \sum_{j=1}^{2} B_j f(x_i, y_j).$$

Exemplo

- Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x+y)\,dy\,dx$, usando $n_x = n_y = 2$ pontos.

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi/2-0}{2}t_i + \frac{0+\pi/2}{2} \to x_i = \frac{\pi}{4}(t_i+1),$$

$$y_j = \frac{d-c}{2}u_j + \frac{c+d}{2} = \frac{\pi/4-0}{2}u_j + \frac{0+\pi/4}{2} \to y_j = \frac{\pi}{8}(u_j+1).$$

			j	1	2
			u_j	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
			y_j	0,1660	0,6194
i	t_i	x_i	$A_i \backslash B_j$	1	1
1	$-1/\sqrt{3}$	0,3319	1	0,4776	0,8142
2	$1/\sqrt{3}$	1,2388	1	0,9863	0,9590

- Valor da integral

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S = \frac{1}{4}(\pi/2-0)(\pi/4-0)\cdot 3{,}2371 \rightsquigarrow$$

$$I = 0{,}9984.$$

Fórmula geral

- Fórmula para $n_x = n_y = 2$ pontos pode ser modificada para um número qualquer de pontos em x e em y.
- Fórmula geral para integração dupla por Gauss-Legendre

$$\boxed{I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\; dy\; dx = \frac{1}{4}(b-a)(d-c) \sum_{i=1}^{n_x} A_i \sum_{j=1}^{n_y} B_j f(x_i, y_j)}.$$

- $x_i = \dfrac{b-a}{2} t_i + \dfrac{a+b}{2}$ e $y_j = \dfrac{d-c}{2} u_j + \dfrac{c+d}{2}$.
- Pesos A_i, $i = 1, 2, \ldots, n_x$ e B_j, $j = 1, 2, \ldots, n_y$ e as abscissas t_i e u_j podem ser obtidos na literatura ou gerados pelo algoritmo dado.

Dispositivo prático

- Calcular uma integral dupla pela fórmula de Gauss-Legendre com n_x pontos em x e n_y em y.

			j	1	2	...	n_y
			u_j	u_1	u_2	...	u_{n_y}
			y_j	y_1	y_2	...	u_{n_y}
i	t_i	x_i	$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	...	B_{n_y}
1	t_1	x_1	A_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	...	$f(x_1, y_{n_y})$
2	t_2	x_2	A_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	...	$f(x_2, y_{n_y})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
n_x	t_{n_x}	x_{n_x}	A_{n_x}	$f(x_{n_x}, y_1)$	$f(x_{n_x}, y_2)$	...	$f(x_{n_x}, y_{n_y})$

- Valor da integral

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S, \; S = \sum_{i=1}^{n_x} A_i \sum_{j=1}^{n_y} B_j f(x_i, y_j).$$

Exemplo

- Calcular $\int_1^4 \int_0^2 (y^2 \log_{10}(3x))\, dy\, dx$, com $n_x = 3$ e $n_y = 4$.

$$x_i = \frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{4-1}{2} t_i + \frac{1+4}{2} \leadsto x_i = 1{,}5 t_i + 2{,}5;$$

$$y_j = \frac{d-c}{2} u_j + \frac{c+d}{2} = \frac{2-0}{2} u_j + \frac{0+2}{2} \leadsto y_j = u_j + 1.$$

			j	1	2	3	4
			u_j	$-0{,}8611$	$-0{,}3400$	0,3400	0,8611
			y_j	0,1389	0,6600	1,3400	1,8611
i	t_i	x_i	$A_i \backslash B_j$	0,3479	0,6521	0,6521	0,3479
1	$-0{,}7746$	1,3381	0,5556	0,0116	0,2629	1,0838	2,0907
2	0,0000	2,5000	0,8889	0,0169	0,3812	1,5713	3,0309
3	0,7746	3,6619	0,5556	0,0201	0,4534	1,8689	3,6051

- Valor da integral

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S = \frac{1}{4}(4-1)(2-0) \cdot 4{,}5107 \leadsto$$

$$I = 6{,}7660.$$

Algoritmo: integração dupla de G-L

```
Algoritmo Gauss-Legendre-Dupla
{ Objetivo: Integração dupla por Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada ax, bx, nx, ay, by, ny
  { lim. inf. em x, lim. sup. em x, num. pontos em x, }
  { lim. inf. em y, lim. sup. em y, num. pontos em y }
parâmetros de saída Integral, Erro
  { valor da integral e condição de erro, sendo }
  { Erro = 0 se não houve erro (nx ≥ 1 e ny ≥ 1) e }
  { Erro = 1 se nx < 1 ou ny < 1 }
  [A, t, Erro] ← PesAbsGL(nx)
  se ny = nx então
    para j ← 1 até trunca((nx + 1)/2) faça
      B(j) ← A(j); u(j) ← t(j)
    fim para
  senão
    [B, u, Erro] ← PesAbsGL(ny)
  fim se
  ex1 ← (bx − ax)/2; ex2 ← (ax + bx)/2
  ey1 ← (by − ay)/2; ey2 ← (ay + by)/2; Soma ← 0
  para i ← 1 até nx faça
    kx←sinal(i−(nx+resto(nx+1, 2))/2)∗(resto(nx,2)+resto(nx+1,2)/2)
    kx ← kx + i − (nx + 1)/2
    tx ← sinal(kx) ∗ t(abs(kx))
    Ax ← A(abs(kx)); x ← ex1 ∗ tx + ex2; Som ← 0
    para j ← 1 até ny
      ky←sinal(j−(ny+resto(ny+1,2))/2)∗(resto(ny,2)+resto(ny+1,2)/2)
      ky ← ky + j − (ny + 1)/2
      ty ← sinal(ky) ∗ u(abs(ky))
      Ay ← B(abs(ky))   y ← ey1 ∗ ty + ey2
      fxy ← f(x, y)   { Avaliar a função em x,y }
      Som ← Som + Ay ∗ fxy
    fim para
    Soma ← Soma + Ax ∗ Som
  fim para
  Integral ← 0,25 ∗ (bx − ax) ∗ (by − ay) ∗ Soma
fim algoritmo
```

Exemplo

- Calcular $\int_2^6 \int_1^3 \sqrt{x^2+y}\ \cos(xy)\ dy\ dx$, com $n_x = 5$ e $n_y = 4$.

Integracao dupla por Gauss-Legendre

i	t(i)	x(i)	A(i)	j	u(j)	y(j)	B(j)	f(x(i),y(j))
1	-0.9062	2.188e+00	0.2369	1	-0.8611	1.139e+00	0.3479	-1.93747e+00
				2	-0.3400	1.660e+00	0.6521	-2.24020e+00
				3	0.3400	2.340e+00	0.6521	1.05584e+00
				4	0.8611	2.861e+00	0.3479	2.76450e+00
2	-0.5385	2.923e+00	0.4786	1	-0.8611	1.139e+00	0.3479	-3.05731e+00
				2	-0.3400	1.660e+00	0.6521	4.45596e-01
				3	0.3400	2.340e+00	0.6521	2.80093e+00
				4	0.8611	2.861e+00	0.3479	-1.64659e+00
3	0.0000	4.000e+00	0.5689	1	-0.8611	1.139e+00	0.3479	-6.47030e-01
				2	-0.3400	1.660e+00	0.6521	3.93758e+00
				3	0.3400	2.340e+00	0.6521	-4.27352e+00
				4	0.8611	2.861e+00	0.3479	1.88500e+00
4	0.5385	5.077e+00	0.4786	1	-0.8611	1.139e+00	0.3479	4.54970e+00
				2	-0.3400	1.660e+00	0.6521	-2.84341e+00
				3	0.3400	2.340e+00	0.6521	4.10146e+00
				4	0.8611	2.861e+00	0.3479	-2.02780e+00
5	0.9062	5.812e+00	0.2369	1	-0.8611	1.139e+00	0.3479	5.57848e+00
				2	-0.3400	1.660e+00	0.6521	-5.80491e+00
				3	0.3400	2.340e+00	0.6521	3.07129e+00
				4	0.8611	2.861e+00	0.3479	-3.65773e+00

- Valor calculado da integral: $I = 1{,}5684$.

Comparação dos métodos de integração dupla

- Primeiro teste

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2xy\,\mathrm{sen}(xy^2)\,dy\,dx.$$

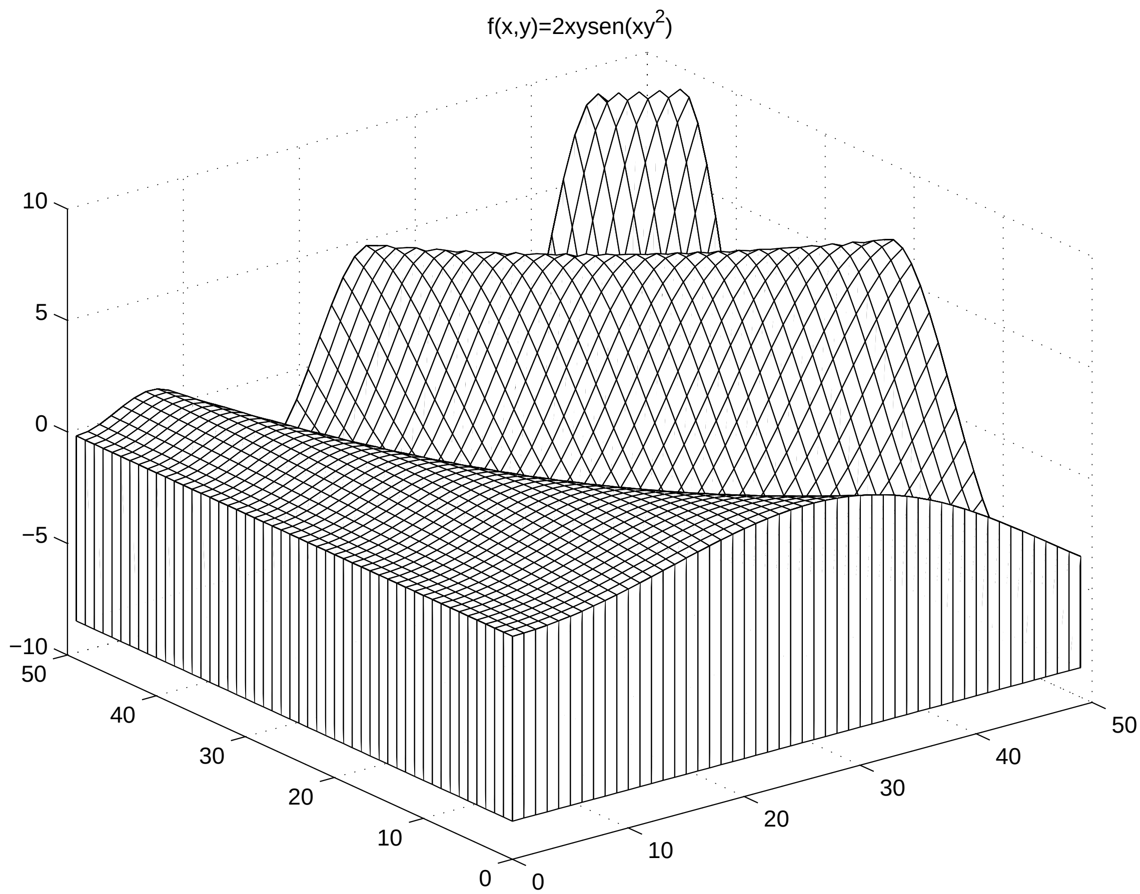
- Solução analítica

$$I = (4\,\mathrm{sen}(\pi^3/8) - \mathrm{sen}(\pi^3/2))/\pi^2 \approx -0{,}2921.$$

- Resultados

grau do polinômio	número de subintervalos	Newton-Cotes	número de pontos	Gauss-Legendre
1	1	$5{,}090\times10^{-1}$	2	$2{,}733\times10^{0}$
2	2	$3{,}154\times10^{-1}$	3	$1{,}123\times10^{0}$
3	3	$6{,}787\times10^{-1}$	4	$7{,}703\times10^{-2}$
4	4	$4{,}335\times10^{-2}$	5	$1{,}448\times10^{-2}$
5	5	$1{,}644\times10^{-1}$	6	$4{,}001\times10^{-3}$
6	6	$1{,}480\times10^{-2}$	7	$4{,}331\times10^{-4}$
7	7	$2{,}935\times10^{-2}$	8	$2{,}440\times10^{-5}$
8	8	$2{,}500\times10^{-2}$	9	$5{,}705\times10^{-7}$

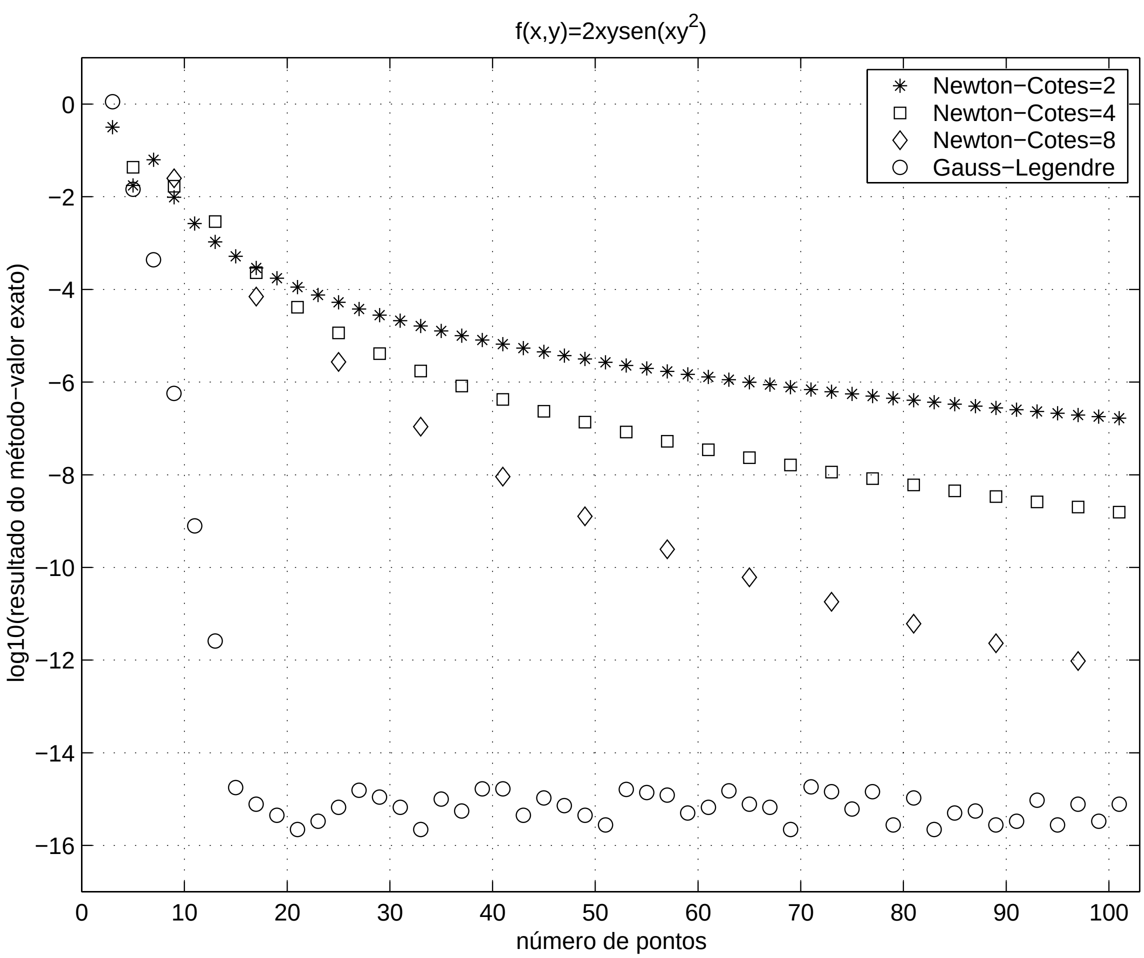
Gráfico da função $f(x, y) = 2xy\text{sen}(xy^2)$



Desempenho de quatro métodos

- Newton-Cotes com $n = 2, 4$ e 8 com m múltiplo de n e Gauss-Legendre com número de pontos $p = 3, 5, 7, \ldots, 101$.

- Abscissa contém o número p de pontos avaliados, e a ordenada, o logaritmo decimal da diferença entre o valor obtido pelo método e o valor exato.



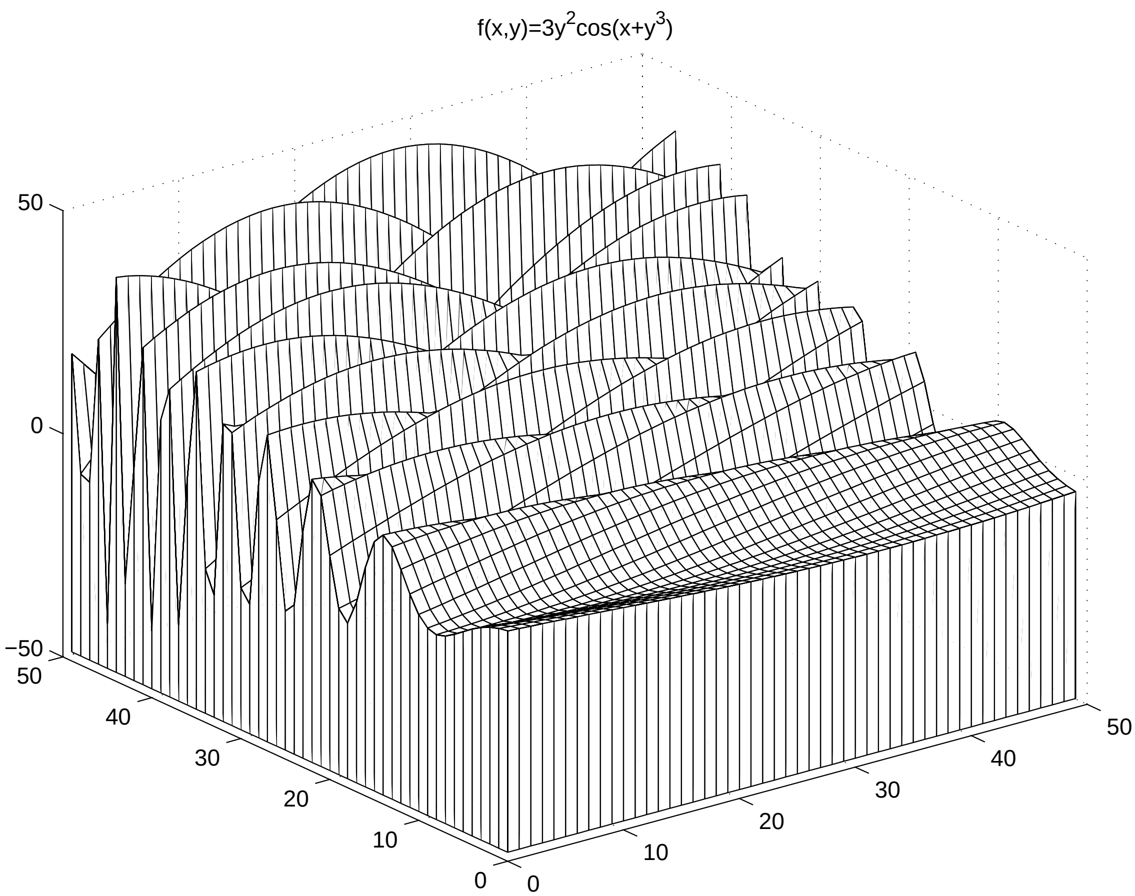
Segundo teste

- Integral dupla

$$\int_0^{\pi} \int_1^4 3y^2 \cos(x + y^3)\, dy\, dx.$$

- Valor exato

$$\cos(64) + \cos(\pi + 1) - \cos(1) - \cos(\pi + 64) \approx -0{,}2969.$$



Desempenho dos quatro métodos