

CCI-22



## Matemática Computacional

Carlos Henrique Q. Forster

CCI-22

## 3) Sistemas Lineares

Notas complementares

## Sistemas Lineares Triangulares

- Triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

## Exercícios

- Resolver

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 = 8 \\ & 8x_2 & +2x_3 = -7 \\ & & 6x_3 = 3 \end{array}$$

---

$$x_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -1$$

$$x_1 = 4$$

## Exercício

- Algoritmo para resolver:

$$\begin{array}{rcl}
 u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + u_{14}x_4 & = & b_1 \\
 & + & u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + u_{24}x_4 = b_2 \\
 & & + u_{33}x_3 + u_{34}x_4 = b_3 \\
 & & & + u_{44}x_4 = b_4
 \end{array}
 \quad \text{Retro-}$$


---


$$\begin{array}{rcl}
 x_4 & = & \frac{b_4}{u_{44}} \\
 x_2 & = & \frac{b_2 - u_{24}x_4 - u_{23}x_3}{u_{22}} \\
 x_3 & = & \frac{b_3 - u_{34}x_4}{u_{33}} \\
 x_1 & = & \frac{b_1 - u_{14}x_4 - u_{13}x_3 - u_{12}x_2}{u_{11}}
 \end{array}
 \quad \text{substituição}$$

## Exercício

- Encontrar algoritmo para resolver

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & b_1 \\
 l_{21}x_1 + x_2 & = & b_2 \\
 l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + x_3 & = & b_3 \\
 \dots & & \\
 l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \dots + l_{nn-1}x_{n-1} + x_n & = & b_n
 \end{array}
 \quad \text{Substituição}$$


---


$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & b_1 \\
 x_2 & = & b_2 - l_{21}x_1 \\
 x_3 & = & b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2 \\
 x_n & = & b_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 \dots - l_{nn-1}x_{n-1}
 \end{array}
 \quad \text{direta}$$

## Eliminação de Gauss-Jordan

- Método para inversão de matriz

$$\begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times 20 \\ (-)}} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & -20 & -20 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times 3 \\ (-)}} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -95 & -20 & -3 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Upper triangular  
Lower triangular

$$\left[ U \mid L^{-1} \right]$$

## Eliminação de Gauss-Jordan

- Continuando...

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -95 & -20 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times 1/10 \\ \times 1/(-95)}}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2,5 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,21 & 0,03 & -0,01 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times 2,5 \\ (-)}}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0,79 & -0,03 & 0,01 \\ 0 & 1 & 0 & -0,53 & 0,02 & 0,03 \\ 0 & 0 & 1 & 0,21 & 0,03 & -0,01 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times -1 \\ (-)}}$$

## Eliminação de Gauss-Jordan

- Finalmente...

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,26 & -0,01 & 0,04 \\ 0 & 1 & 0 & -0,53 & 0,02 & 0,03 \\ 0 & 0 & 1 & 0,21 & 0,03 & -0,01 \end{array} \right]$$

- O processo realiza a transformação

$$[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$$

através de várias multiplicações de matrizes, como veremos a seguir.

## Sistemas Equivalentes

- Considere um sistema linear determinado, na forma matricial:

$$Ax=b$$

Cuja solução é  $x=A^{-1}b$

Multiplicamos ambos os lados da equação por uma matriz quadrada  $M$  à esquerda

$$MAx=Mb$$

A solução do novo sistema é

$$x=(MA)^{-1}Mb=A^{-1}M^{-1}Mb=A^{-1}b$$

O que o faz equivalente ao original se  $M$  é inversível.

## Operações L-elementares

- 1 - Multiplicar uma linha por um escalar

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 a_{11} & \alpha_1 a_{12} & \alpha_1 a_{13} \\ \alpha_2 a_{21} & \alpha_2 a_{22} & \alpha_2 a_{23} \\ \alpha_3 a_{31} & \alpha_3 a_{32} & \alpha_3 a_{33} \end{bmatrix}$$

- O determinante da matriz de escala é

$$\det S = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

- Logo, nenhum dos escalares deve ser nulo

## Operações L-elementares

- 2- Trocar duas linhas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Para construir a matriz que troca a linha 2 pela linha 3, basta pegar a matriz identidade e trocar essas duas linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O determinante é -1 !!!

## Operações L-elementares

- Multiplicar uma linha por um escalar e subtrair numa linha abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - ma_{11} & a_{22} - ma_{12} & a_{23} - ma_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- O determinante da matriz de eliminação é 1.
- A matriz de eliminação é triangular inferior.
- Verifique que o produto de duas triangulares inferiores é também triangular inferior.

## Eliminação Gaussiana

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Forma matricial (aumentada) compacta

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{bmatrix}$$

Para cada coluna, os elementos sob a diagonal são anulados. Multiplicador linha "i" coluna "j":

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \quad \text{Onde } a_{jj} \text{ é chamado pivot.}$$

## Eliminação Gaussiana

$$\times m_{21} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{bmatrix} \quad \times m_{31} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & b_3 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & b_1 \\ a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11} & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} & | & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{11} & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} & | & b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1 \end{bmatrix}$$

## Eliminação Gaussiana

A operação anterior corresponde à multiplicação pela matriz de eliminação  $M_1$ .

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax=b \text{ -----} \rightarrow M_1Ax=M_1b$$

## Eliminação Gaussiana

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \\ a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{11} & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} & b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1 \end{array} \right]$$

A nova matriz teve os elementos renomeados com ' para sugerir que os valores serão substituídos na mesma posição de memória.

## Eliminação Gaussiana

$$\times m_{32} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array} \right] \quad m_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{22} & a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23} & b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right]$$

## Eliminação Gaussiana

O sistema equivalente obtido é triangular superior e pode ser facilmente resolvido pelo método da retrossubstituição.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right]$$

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23} x_3}{a'_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{13} x_3 - a_{12} x_2}{a_{11}}$$

## Eliminação Gaussiana

- Observar que a eliminação para a nova coluna se deu através da multiplicação pela matrix  $M_2$ .

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

A composição das eliminações pode ser escrita como:

$$M_2 M_1 A x = M_2 M_1 b$$

## Eliminação Gaussiana

- A matriz  $A$  pode ser escrita pelo produto a seguir:

$$A = M_1^{-1} M_2^{-1} M_2 M_1 A$$

Sabemos que a matriz dos multiplicadores é triangular inferior e a matriz resultante do processo de eliminação é triangular superior. Assim,  $L$  é triangular inferior,  $U$  é triangular superior e seu produto é a matriz  $A$ .

$$L = M_1^{-1} M_2^{-1}$$

$$U = M_2 M_1 A$$

$$A = LU$$

## Solução de sistemas pela Dec. LU

- Construímos a decomposição LU da matriz de coeficientes do sistema pelo processo de eliminação gaussiana.
- Não é necessário realizar a eliminação no vetor de termos independentes "b".
- Se "b" mudar, a decomposição LU não se altera e pode ser utilizada para obter a nova solução "x".
- "b mudar" significa trocar as cargas na treliça ou as fontes de tensão no circuito.

## Solução de sistemas pela Dec. LU

- Resolver pela decomposição LU o sistema a seguir.
- Utilizar o método de Doolittle, isto é, a diagonal da matriz  $L$  deve ser toda de elementos "1" por convenção.
- (A convenção oposta é que a matriz  $U$  tenha apenas elementos "1" na diagonal, que é a convenção de Crout e não utilizamos no curso)

## Solução de sistemas pela Dec. LU

$$\begin{cases} w + x + y & = 6 \\ -3w - 17x + y + 2z & = 2 \\ 4w - 17x + 8y - 5z & = 2 \\ -5x - 2y + z & = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -17 & 1 & 2 \\ 4 & -17 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Quanto multiplica a linha 1 para anular os elementos "-3" e "4"?

## Solução de sistemas pela Dec. LU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -17 & 1 & 2 \\ 4 & -17 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -14 & 4 & 2 \\ 4 & -21 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

pivot  
 Matriz escalonada  
 multiplicadores

## Solução de sistemas pela Dec. LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -14 & 4 & 2 \\ 4 & -21 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -14 & 4 & 2 \\ 4 & 3/2 & -2 & -8 \\ 0 & 5/14 & -24/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

## Solução de sistemas pela Dec. LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -14 & 4 & 2 \\ 4 & 3/2 & -2 & -8 \\ 0 & 5/14 & 12/7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/14 & 12/7 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

## Solução de sistemas pela Dec. LU

- Aplicamos agora o método de Doolittle

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$A = LU$$

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

## Solução de sistemas pela Dec. LU

$$Ly = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/14 & 12/7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solução pelo método da substituição direta.

$$\begin{aligned} y_1 &= 6 \\ -3y_1 + 2y_2 &= 2 \\ y_2 &= 20 \\ 4y_1 + 3/2y_2 + y_3 &= 2 \\ y_3 &= -52 \\ \dots \\ y_4 &= 84 \end{aligned}$$

## Solução de sistemas pela Dec. LU

$$Ux = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ -52 \\ 84 \end{bmatrix}$$

Solução pelo método da retro-substituição.

$$\begin{aligned} 14x_4 &= y_4 \\ x_4 &= 6 \\ -2x_3 - 8x_4 &= y_3 \\ x_3 &= \frac{-52 + 8 \cdot 6}{-2} = 2 \\ x_2 &= \frac{y_2 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 6}{-14} = 0 \\ \dots \\ x_1 &= 4 \end{aligned}$$

Não esquecer que a solução é obtida de baixo para cima.

## Solução de sistemas pela Dec. LU

### Exercício:

Resolver o sistema anterior só que agora

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$Ly = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/14 & 12/7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 6 \\ y_2 &= 20 \\ y_3 &= -52 \\ \frac{5}{14}y_2 + \frac{12}{7}y_3 + y_4 &= 10 \\ y_4 &= 92 \end{aligned}$$

## Solução de sistemas pela Dec. LU

$$Ux = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ -52 \\ 92 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 14x_4 &= y_4 \\ x_4 &= \frac{46}{7} \\ -2x_3 - 8x_4 &= y_3 \\ x_3 &= \frac{-52 + 8 \cdot \frac{46}{7}}{-2} = \frac{-2}{7} \\ x_2 &= \frac{20 - \frac{92}{7} + \frac{8}{7}}{-14} = \frac{-4}{7} \\ x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_1 &= \frac{48}{7} \end{aligned}$$



## Aplicações da Eliminação Gaussiana

- Como calcular o determinante de uma matriz utilizando o processo de eliminação gaussiana?
- Como determinar a matriz inversa pelo processo de eliminação gaussiana?

## Problemas na Eliminação Gaussiana

- Como fazer eliminação se pivot for zero?

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Troca de linhas

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

## Problemas na Eliminação Gaussiana

- E se o pivot for relativamente muito pequeno?

$$\begin{bmatrix} 0,001 & 2,42 \\ 1,00 & 1,58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,20 \\ 4,57 \end{bmatrix}$$

Eliminando com 3 significativos:

$$\begin{bmatrix} 0,001 & 2,42 \\ 0 & -2420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,20 \\ -5200 \end{bmatrix}$$

Os valores da segunda equação foram desprezados no arredondamento e obtemos a solução errada:

$$x_1 = 0,00 \quad x_2 = 2,15$$

O problema foi o multiplicador muito grande.

## Problemas na Eliminação Gaussiana

- Com a troca de linhas:

$$\begin{bmatrix} 1,00 & 1,58 \\ 0,001 & 2,42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,57 \\ 5,20 \end{bmatrix}$$

Multiplicador pequeno, reduz erro de arredondamento

$$\begin{bmatrix} 1,00 & 1,58 \\ 0 & 2,42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,57 \\ 5,20 \end{bmatrix}$$

Obtemos a solução

$$x_1 = 1,18 \\ x_2 = 2,15$$

## Pivoteamento Parcial

- Estratégia: minimizar os multiplicadores, procurando o maior pivot (denominador) possível.
- Pivoteamento parcial procura o melhor pivot na coluna que está sendo eliminada, sob a diagonal principal.
- O melhor pivot é aquele maior em módulo!!
- Fazem-se trocas de linhas para levar o maior elemento para a diagonal principal

## Pivoteamento Parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

pivot

Matriz de permutação multiplicada à esquerda

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$P A \mathbf{x} = P \mathbf{b}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -2 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -15 \\ 11 \end{bmatrix}$$

## Pivoteamento Parcial

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -2 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -15 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times \left(\frac{-1}{2}\right) \\ \times \frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1,5 \\ 0 & -1,5 & 0,75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0,5 \\ 3,75 \end{bmatrix}$$

Sem necessidade de trocar (na verdade, nem poderia)

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0,5 \\ 3,6 \end{bmatrix}$$

## Pivoteamento Total

- O pivoteamento total é uma estratégia mais radical para escolha do pivot de maior módulo.
- O pivot é procurado na submatriz ainda não escalonada.
- É um processo caro e na maioria das vezes não compensa (busca é  $O(N^2)$  a cada coluna, não eleva a complexidade total que é  $O(N^3)$ , mas acrescenta muitas comparações).
- Precisa da troca de linhas e de colunas.
- A troca de colunas interfere na ordem das variáveis!!!

## Pivoteamento Total

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 11 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 11 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Troca de colunas é feita pela multiplicação à direita por uma matriz de permutação.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{APP}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$