CCI-36 – Computação Gráfica

Transformações 2D em Geometria Projetiva

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Prof. Carlos Henrique Q. Forster – Sala 121 IEC

forster@ita.br

Tópicos da aula

- Rotação em 2D, Escala e Reflexo
- Deformação do quadrado unitário
- Corpo rígido em 2D
- Geometria Projetiva e Coordenadas homogêneas
- Dualidade
- Combinação de Transformações
- Classes de Transformações

Livros para acompanhar essa aula

Mathematical Elements for Computer Graphics (2nd edition)

D. F. Rogers, J. A. Adams

McGraw-Hill

Capítulos 2 e 3 pp 61-206

Fundamentos de Geometria Computacional

Resende, R. J., Stolfi, J.

IX Escola de Computação, Recife, 1994

Capítulo 2 pp 25-76

Rotação em 2D

Rotação de 90 graus anti-horária

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Exemplo

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

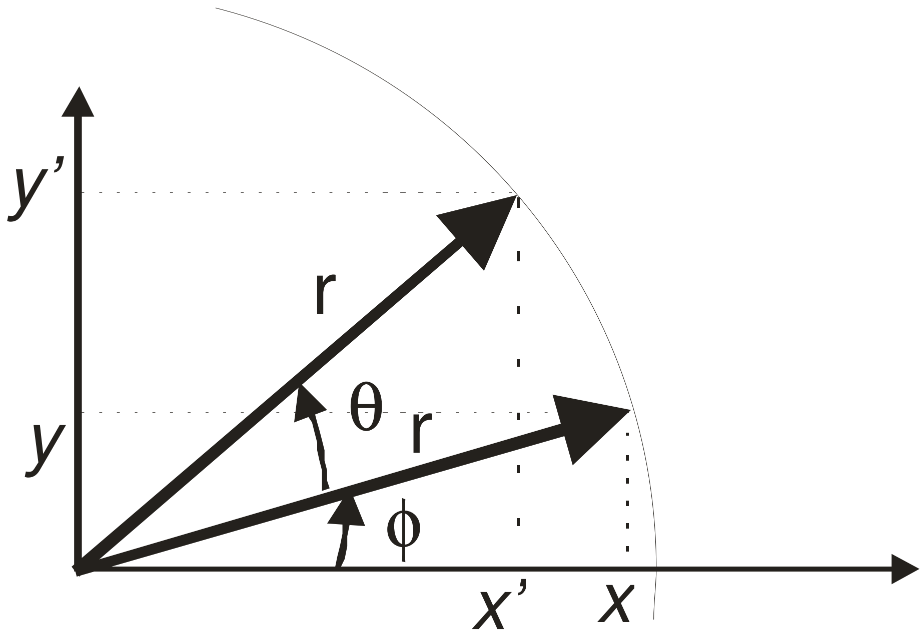
$$P' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Nova rotação, resulta rotação de 180 graus

$$P'' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P$$

Forma Geral da Rotação (em torno da origem)

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = r\cos(\phi+\theta) \\ y' = r\sin(\phi+\theta) \end{cases}$$

$$\cos(\phi+\theta) = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta$$

$$\sin(\phi+\theta) = \cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta$$

$$\begin{cases} x' = \underline{r\cos\phi}\cos\theta - \underline{r\sin\phi}\sin\theta \\ y' = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Propriedades da rotação

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ rotação por θ no sentido anti-horário em torno da origem

Determinante $\det T = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Inversa: rotação por -θ

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notar que $T^T = T^{-1}$, propriedade de matriz ortogonal

Reflexo

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ reflexo sobre o eixo x.

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ reflexo sobre o eixo y.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ reflexo sobre a reta x=y.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Determinante é -1. Dois reflexos sobre retas passando pela origem compõem uma rotação. A matriz do reflexo é ortogonal.

Escala

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ uniforme

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ não-uniforme

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$ forma geral da escala, a>1 amplia ou expande, a<1 reduz ou comprime

Se a=d, então escala é uniforme.

Composição de Transformações

Multiplicação de matrizes é associativa

$$P_F = T_4 T_3 T_2 T_1 P_0$$

$$P_1 = T_1 P_0,\ P_2 = T_2 P_1 = T_2 T_1 P_0, \quad \ldots$$

Então

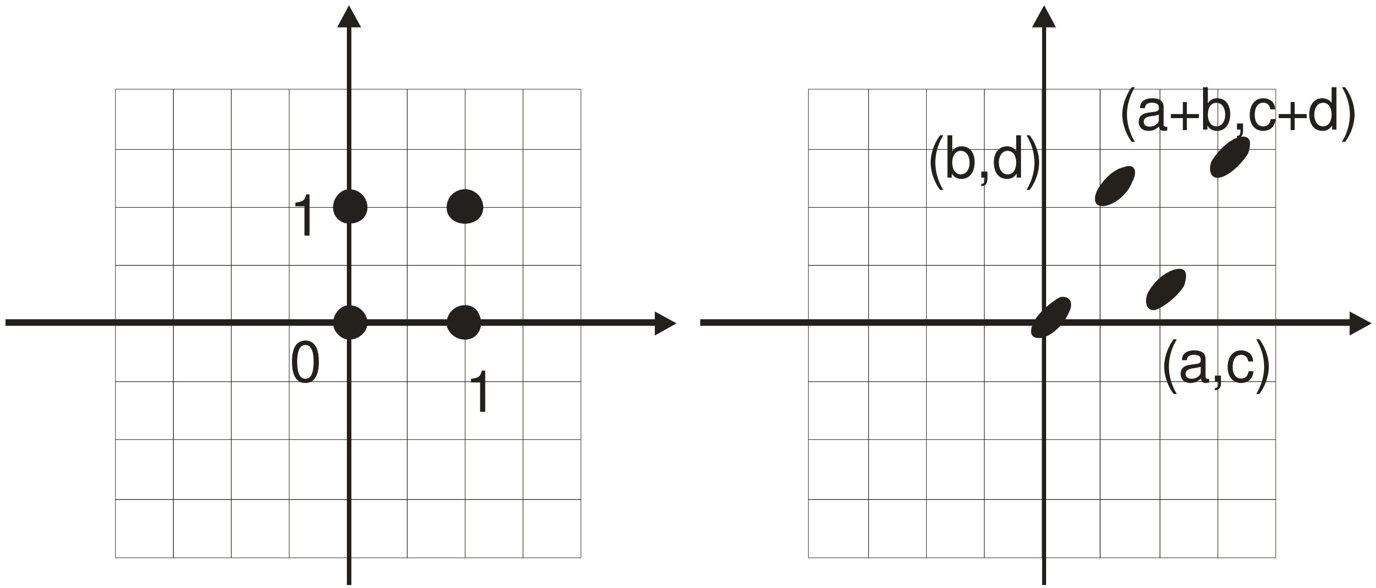
$P_F = T P_0$, onde $T = T_4 T_3 T_2 T_1$

Transformação do Quadrado Unitário

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & a+b \\ 0 & c & d & c+d \end{bmatrix}$$

Área do paralelogramo

$$A = ad - bc = \det T = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$



Transformação de corpo rígido

Que transformações levam retas perpendiculares em retas perpendiculares?

Sejam os vetores $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

Seu produto escalar é $v_1^T v_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2)$ e o vetorial $\left| v_1 \times v_2 \right| = (x_1 y_2 - y_1 x_2)$.

$$v_1' = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{bmatrix} \quad e \quad v_2' = \begin{bmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{bmatrix}$$

Produto escalar deve ser o mesmo

$$v_1'^T v_2' = (a^2 + c^2)(x_1 x_2) + (b^2 + d^2)(y_1 y_2) + (ab + cd)(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Produto vetorial deve ser o mesmo

$$v_1' \times v_2' = (ad - cb)(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Condições para preservar a magnitude dos vetores e seus ângulos

$$a^2 + c^2 = 1$$

$$b^2 + d^2 = 1$$

$$ab + cd = 0$$ vetores (a,c) e (b,d) unitários e ortogonais

Condição do produto vetorial

$$ad - cb = 1$$

Condição de que $\det T = 1$

Geometria Projetiva

Coordenadas cartesianas

Função que biunivocamente mapeia um par de números reais nos pontos do plano.

Desvantagens do uso de coordenadas cartesianas

- Não suportam o conceito de pontos no infinito, o que gera muitos casos particulares (por exemplo, para encontrar a intersecção de duas retas deve-se considerar se são concorrentes, coincidentes ou paralelas).
- Não representam dualidade entre pontos e retas.
- Representação inconveniente para transformações geométricas.

Coordenadas homogêneas

Se $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ são coordenadas em $\mathbb{R}^2$ então $\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$ tais que $X = \frac{x}{w}$ e $Y = \frac{y}{w}$ com o peso $w > 0$ são as coordenadas homogêneas do ponto representado.

Há múltiplas representações possíveis para um ponto em $\mathbb{R}^2$ da forma

$$\begin{bmatrix} wX \\ wY \\ w \end{bmatrix}, \quad w > 0$$

(qualquer múltiplo representa o mesmo ponto)

Questão: o que acontece com $\begin{bmatrix} x & y & w \end{bmatrix}^T$ se x e y permanecem constantes e w tende a zero? E se w tende ao infinito?

Pontos no infinito

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$ com x e y constantes e w tendendo a zero, o ponto se afasta infinitamente da origem na direção do vetor (x,y).

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ (e seus múltiplos) representa o ponto infinito na direção do vetor (x,y)

$\begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$ representa o ponto no infinito “antípoda” do ponto $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$

A tripla $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é considerada inválida.

Pontos do outro lado do plano

O valor de w negativo pode ser interpretado como um ponto que atravessou o infinito (está além do infinito).

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$ corresponde ao ponto cartesiano $\begin{bmatrix} x/w \\ y/w \end{bmatrix}$ se estiver na frente do plano (aquém), isto é, se w>0, ou no seu verso se w<0 (além).

Dois pontos que diferem no sinal de w não são coincidentes, mas antípodas

$$\neg\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -w \end{bmatrix} \qquad \neg\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Retas

No plano cartesiano a reta é definida por três coeficientes A, B e C tais que, somente se um ponto $P = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ pertence à reta, então $AX + BY + C = 0$

(equação cartesiana da reta)

Reparar que múltiplos de (A,B,C) representam a mesma reta.

Escrevendo P em coordenadas homogêneas:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}, \quad A\left(\frac{x}{w}\right) + B\left(\frac{y}{w}\right) + C = 0$$

, multiplicando por w...

$Ax + By + Cw = 0$ (equação homogênea da reta)

Uma reta é definida por 3 coeficientes homogêneos <X,Y,W> sendo que o ponto genérico $P = \begin{bmatrix} x & y & w \end{bmatrix}^T$ está na reta se e só se

$$Xx + Yy + Ww = 0$$

Exemplo

A reta <2,3,1> passa pelos pontos tais que

$2x + 3y + w = 0$, ou seja, $2X + 3Y + 1 = 0$ em coordenadas cartesianas.

Exercícios

- Qual a equação cartesiana da reta com coeficientes <3,5,2>?
- Quais os coeficientes homogêneos da reta 3X-2Y=6 (eq cartesiana)?
- Quais os coeficientes homogêneos dos eixos X e Y?
- Em que condições a reta é horizontal? Vertical? Passa pela origem?
- Quais as coordenadas homogêneas da origem do plano cartesiano?

Pontos no infinito de uma reta

$Xx + Yy + Ww = 0$ é satisfeita pelos pontos infinitos $\begin{bmatrix} Y \\ -X \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{bmatrix}$.

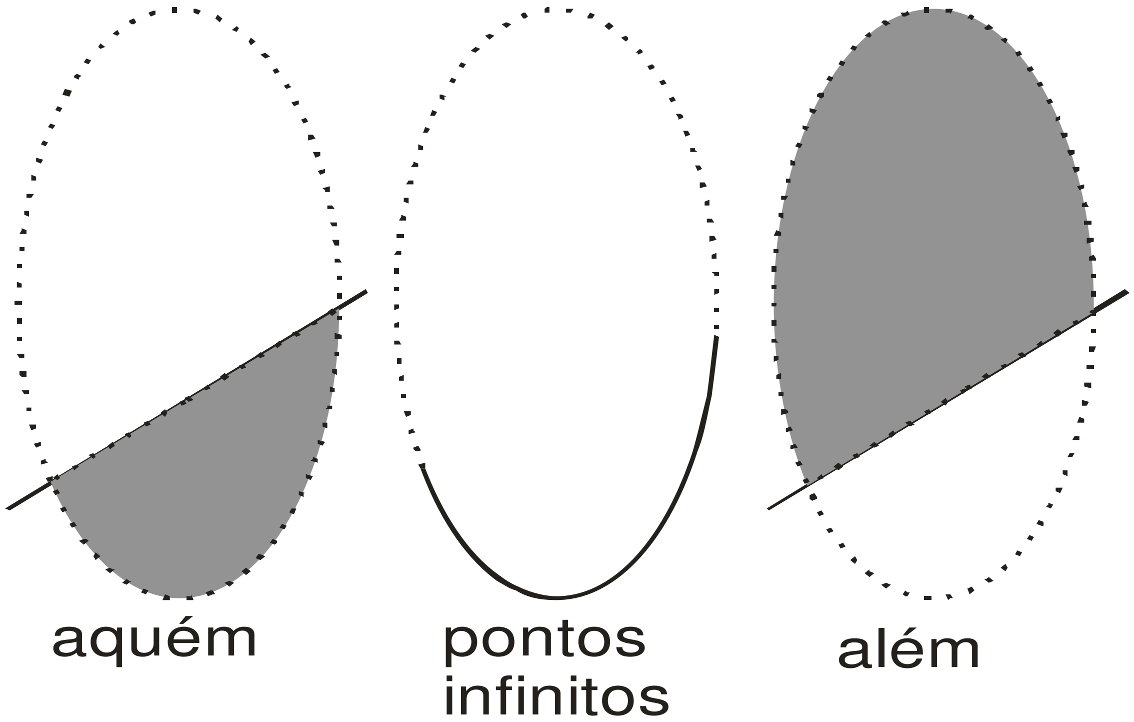
Toda reta paralela a um vetor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ contém os pontos infinitos $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$.

Duas retas de $\mathbb{R}^2$ são paralelas entre si se e somente se as retas correspondentes de $\mathbb{T}^2$ (o plano projetivo orientado) passam pelos mesmos pontos no infinito.

Se uma reta passa por um ponto P, também passa por seu antípoda $\neg P$.

Uma reta de $\mathbb{T}^2$ é representada por duas retas euclidianas superpostas, uma no aquém e outa no além, com os mesmos coeficientes cartesianos, mais dois pontos infinitos, nas direções paralelas às retas.

A reta divide o plano $\mathbb{T}^2$ em duas metades (os lados da reta) o lado positivo e o lado negativo de acordo com o sinal da expressão $Xx + Yy + Ww$. Se um ponto está do lado positivo da reta, seu antípoda estará no lado negativo.



Teste de ponto contra reta

De que lado da reta está um ponto? Verificar o sinal do produto escalar.

$$r \lozenge p = \operatorname{sgn}\left(Xx + Yy + Ww\right)$$

-1 do lado negativo, +1 do lado positivo ou 0 se sobre a reta.

Se multiplicarmos os coeficientes de r por um número negativo, o valor de $r \lozenge p$ fica negado (os lados positivos e negativos da reta se invertem).

As retas $r = \left\langle X, Y, W \right\rangle$ e $r' = \left\langle -X, -Y, -W \right\rangle$ são coincidentes, mas não são iguais: diferem na sua orientação.

Reta no infinito

$Ax + By + Cw = 0$ com A=B=0.

Esta equação não é aceita por nenhum ponto de R2 (ou por todos se C=0).

Triplas da forma $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix}$ correspondem a uma das retas opostas que contém todos os pontos infinitos:

$0x + 0y + 1w = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow$ a reta contém todos os pontos da forma $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$

A reta no infinito (com aquém positivo) é denominada Ω.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \neg\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Duas retas não-coincidentes se interceptam em dois pontos antipodais.

Dois pontos não-coincidentes determinam exatamente duas retas opostas entre si.

Essas regras funcionam para qualquer tipo de ponto (finito ou infinito) e reta (paralelas ou não, finita ou infinita).

Colinearidade de 3 pontos

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

convertido em coord homogêneas

$$\begin{vmatrix} x_0 / w_0 & y_0 / w_0 & 1 \\ x_1 / w_1 & y_1 / w_1 & 1 \\ x_2 / w_2 & y_2 / w_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicando-se as linhas por w_0, w_1, w_2 respectivamente, multiplica-se o determinante por $w_0 w_1 w_2$. Assim:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

válida para quais quer pontos (finitos ou infinitos).

Reta por 2 pontos

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & w_1 \\ x & y & w \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} y_0 & w_0 \\ y_1 & w_1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_0 & w_0 \\ x_1 & w_1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} w = 0$$

Reta que passa por p_0 e p_1 é $p_0 \vee p_1 = \begin{bmatrix} y_0 w_1 - y_1 w_0 \\ -x_0 w_1 + x_1 w_0 \\ x_0 y_1 - x_1 y_0 \end{bmatrix}$ (join – produto vetorial)

(vale para qualquer pontos não coincidentes, não antipodais)

Exercício: Determinar a reta que passa pela origem e por (X,Y).

Ponto determinado por duas retas

$$r_0 = \left\langle X_0, Y_0, W_0 \right\rangle \quad e \quad r_1 = \left\langle X_1, Y_1, W_1 \right\rangle$$

$p = r_0 \wedge r_1$ (meet) é a intersecção das retas. (X,Y) em coordenadas cartesianas.

$$\begin{cases} X_0 X + Y_0 Y = -W_0 \\ X_1 X + Y_1 Y = -W_1 \end{cases}$$, pela regra de Cramer:

$$X = \frac{-\begin{vmatrix} W_0 & Y_0 \\ W_1 & Y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}} \quad e \quad Y = \frac{-\begin{vmatrix} X_0 & W_0 \\ X_1 & W_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}}$$

Fazendo W=1 e multiplicando X, Y e W pelo denominador comum, obtemos as coordenadas homogêneas do ponto.

$$p = r_0 \wedge r_1 = \begin{bmatrix} -W_0Y_0 + W_1Y_0 \\ W_0X_1 - W_1X_0 \\ X_0Y_1 - X_1Y_0 \end{bmatrix}$$ (meet – produto vetorial)

Se as duas retas forem paralelas, a solução será um ponto infinito.

Dualidade da Geometria Projetiva

O princípio da dualidade permite traduzir mecanicamente muitas fórmulas geométricas que envolvem pontos em outras fórmulas que envolvem retas e vice-versa. O mesmo vale para teoremas, algoritmos e estruturas de dados.

Segmentos e triângulos

A combinação convexa em coordenadas homogêneas não necessita limitar a soma dos pesos em 1. A combinação é convexa para cada α_i positivo, e pelo menos um deles não nulo.

Um segmento é definido como a combinação convexa de dois pontos.

Um triângulo é definido como a combinação convexa de 3 pontos, o que inclui os segmentos de reta que formam os lados do triângulo.

Segmento: $\begin{bmatrix} \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 \\ \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 \end{bmatrix}$. Triângulo $\begin{bmatrix} \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \end{bmatrix}$.

Não se aconselha interpretar o ponto correspondente a cada tupla de α_i independentemente, mas o conjunto das possíveis tuplas.

Orientação de 3 pontos

$$\Delta(p_0, p_1, p_2) = \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

Orientação positiva ou negativa.

Se for zero, os pontos são colineares.

Projetividades

(ou Transformações Projetivas)

São transformações do plano T2 ao plano T2.

Preserva a colinearidade de pontos.

Projetividades são transformações lineares inversíveis sobre coordenadas homogêneas.

No plano podem ser representadas por matrizes 3x3 de determinante não-nulo.

$$F = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xw} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yw} \\ f_{wx} & f_{wy} & f_{ww} \end{bmatrix}$$

Formam-se duas classes de projetividades:

As de determinante positivo (ou projetividades positivas), que preservam a orientação dos triângulos.

As de determinante negativo (negativas), que invertem a orientação dos triângulos.

Multiplicando-se a matriz F por um escalar positivo, continuamos representando a mesma transformação. ($F \cdot p = \alpha F \cdot p$ em coordenadas homogêneas).

Translações

Transformações da forma

$$(X,Y) \mapsto (X + X_0, Y + Y_0) = (X,Y) + (X_0, Y_0)$$

Preservam distâncias, direções e ângulos.

Translação que leva a origem para o ponto $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & w_0 \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} xw_0 + wx_0 \\ yw_0 + wy_0 \\ ww_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & 0 & x_0 \\ 0 & w_0 & y_0 \\ 0 & 0 & w_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Exercício: Aplicar translação a um ponto infinito.

Exercício: Escrever a matriz que mapeia (X_0, Y_0) em (X_1, Y_1).

Propriedades das transformações já vistas

Translações não podem ser representadas como transformações lineares no plano cartesiano (só em coordenadas homogêneas). São transformações afins em coordenadas cartesianas.

Rotações preservam ângulos e distâncias.

Escalas uniformes preservam ângulos e direções.

Escalas não-uniformes preservam direções verticais e horizontais.

Reflexos preservam distâncias, invertem ângulos

Cisalhamentos

$$(X, Y) \mapsto (X + \alpha Y, Y)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$ (cisalhamento horizontal – preserva coordenada Y, paralelismo e áreas)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$ (cisalhamento vertical)

Mais classes de transformações

Isometrias ou transformações isométricas: rotações, translações e reflexos. Modelam movimentos rígidos no plano, preservam distâncias e ângulos.

Similaridades ou transformações euclidianas: incluem as isometrias e escalas uniformes, preservam ângulos e razões entre distâncias.

Transformações unitárias: incluem as isometrias e os cisalhamentos, preservam áreas e paralelismo.

Transformações afins inversíveis: preservam o paralelismo e (consequentemente) mapeiam pontos do infinito no infinito e pontos finitos em pontos finitos.

Todas essas classes de transformações são fechadas quanto à inversão e à composição.

Propriedade: $(F \cdot G)^{-1} = G^{-1} \cdot F^{-1}$

As similaridades têm a forma

$$\begin{bmatrix} a & -b & x_d \\ b & a & y_d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}, \quad pelo\ menos\ a \neq 0\ ou\ b \neq 0$$

As transformações afins têm a forma

$$(X, Y) \mapsto (aX + bY + e, cX + dY + f) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Ou $\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$

Aplicação de Projetividades em Retas

$$Xx + Yy + Ww = 0$$

$$r^T p = 0$$

$$r^T F^{-1} F p = 0,$$

Mas $Fp = p'$.

Se $r'^T p' = 0$, então $r'^T = r^T F^{-1}$

Assim, transpondo ambos os lados:

$$r' = F^{-T} r$$

Exemplo

Rotação em torno de um ponto arbitrário.

Rotação por ângulo θ em torno do ponto (m, n)

- Translação de (m,n) à origem.
- Rotação por θ.
- Translação da origem à (m,n)

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1^{-1}$$

Exemplo: Rotação de 90 graus em torno de (4,3)

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1^{-1}$$

$$T = T_3 T_2 T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Reflexo sobre uma reta arbitrária.

$$y = \tan\theta\, x + k$$

- Transladar para que a reta passe pela origem
- Rotação para que a reta coincida com o eixo x
- Reflexo sobre eixo x
- Rotação inversa para corrigir a direção
- Translação inversa para corrigir a posição

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1^{-1} = R_1^{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A seqüência de transformações é dada por

$$T = T_1^{-1} R_1^{-1} M R_1 T_1$$

Exemplo: Reta $y = \frac{1}{2}(x+4)$, Pontos $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$